

PROVE D'ESAME 1993/94**PROVA PARZIALE DEL 16/11/1993**

1) Sia dato il seguente programma lineare **P**:

$$\begin{aligned} \max \quad & -2x_1 + x_2 - 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 - 2x_2 + 7x_3 \geq -3 \\ & x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 0 \\ & 3x_1 - 4x_2 + 12x_3 \geq -2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- Il programma lineare **P** ammette la forma normale? Il punto **A** (0, 3, 1) è ammissibile per **P**? E' un vertice della regione ammissibile di **P**? E' degenere? Quanto vale **z(A)**?
- Scrivere la forma analitica del programma lineare **P*** duale di **P**. Il punto **A*** (0, 1, 0) è ammissibile per **P***? E' un vertice della regione ammissibile di **P***? E' degenere? Quanto vale **w(A*)**?
- Determinare una soluzione ottimale per i due programmi lineari **P** e **P***.

2) Sia dato il seguente problema dello zaino:

oggetto	A	B	C	D
peso	9	8	18	11
valore	4	5	8	6

peso massimo trasportabile = 20

- Risolvere con il metodo Branch and Bound scrivendo per ogni sottoproblema la forma analitica e la limitazione.
Si scelga per la separazione il sottoproblema con la migliore limitazione.
Si eliminino i sottoproblemi non appena si verificano le condizioni per farlo, precisando quali sottoproblemi vengono eliminati e quale criterio è stato utilizzato per ciascuno.
Completare la risoluzione con l'albero decisionale.
- Introdurre la condizione che l'oggetto **A** viene portato se e solo se viene portato l'oggetto **B** e risolvere il nuovo problema come descritto al punto a).

SOLUZIONE DELLA PROVA PARZIALE DEL 16/11/1993

1a) Riscrivendo i vincoli in forma canonica si ha:

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - 7x_3 &\leq 3 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 &\leq 0 \\ -3x_1 + 4x_2 - 12x_3 &\leq 2 \end{aligned}$$

Poichè i termini noti sono tutti non negativi il programma lineare **P** ammette la forma normale.

Nel punto **A** le variabili valgono $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$ e sono non negative e i vincoli valgono $u_1 = 4$, $u_2 = 0$, $u_3 = 2$ e sono non negativi per cui **A** è ammissibile per **P**.

Il punto **A** non è un vertice della regione ammissibile di **P** poichè appartiene solo agli iperpiani generatori $x_1 = 0$ e $u_2 = 0$ quindi non ha senso chiedersi se è degenere.

$$z(\mathbf{A}) = 0.$$

1b) Il programma lineare **P*** si può scrivere nella forma:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 3 \mathbf{u}_1 + 2 \mathbf{u}_3 \\
 \text{s.t.} \quad & -\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 - 3 \mathbf{u}_3 \geq -2 \\
 & 2 \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + 4 \mathbf{u}_3 \geq 1 \\
 & -7 \mathbf{u}_1 - 3 \mathbf{u}_2 - 12 \mathbf{u}_3 \geq -3 \\
 & \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

Nel punto $\mathbf{A}^*$ le variabili valgono $\mathbf{u}_1 = 0$, $\mathbf{u}_2 = 1$, $\mathbf{u}_3 = 0$ e sono non negative, i vincoli valgono $\mathbf{x}_1 = 1$, $\mathbf{x}_2 = 0$, $\mathbf{x}_3 = 0$ e sono non negativi per cui $\mathbf{A}^*$ è ammissibile per $\mathbf{P}^*$.

Il punto $\mathbf{A}^*$ appartiene agli iperpiani generatori $\mathbf{u}_1 = 0$, $\mathbf{u}_3 = 0$, $\mathbf{x}_2 = 0$ e $\mathbf{x}_3 = 0$ e dalla tabella:

	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{u}_3$	
$\mathbf{x}_1$	-1	-1	-3	2
$\mathbf{x}_2$	2	1	4	-1
$\mathbf{x}_3$	-7	-3	-12	3

risulta che gli iperpiani generatori $\mathbf{u}_1 = 0$, $\mathbf{u}_3 = 0$ e $\mathbf{x}_2 = 0$ sono linearmente indipendenti in quanto possono formare una base, per cui $\mathbf{A}^*$ è un vertice della regione ammissibile di $\mathbf{P}^*$ ed è degenere in quanto appartiene a più di tre iperpiani generatori.

$$\mathbf{w}(\mathbf{A}^*) = 0.$$

1c) I punti $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}^*$ sono ottimali in quanto sono ammissibili e $\mathbf{z}(\mathbf{A}) = \mathbf{w}(\mathbf{A}^*)$.

2a) Riordinando gli oggetti per pesi crescenti e introducendo le variabili decisionali si ha:

oggetto	B	A	D	C
peso	8	9	11	18
valore	5	4	6	8
variabile	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$

peso massimo trasportabile = 20

$$\begin{aligned}
 (-) \quad \max \quad & 5 \mathbf{x}_1 + 4 \mathbf{x}_2 + 6 \mathbf{x}_3 + 8 \mathbf{x}_4 \\
 \text{s.t.} \quad & 8 \mathbf{x}_1 + 9 \mathbf{x}_2 + 11 \mathbf{x}_3 + 18 \mathbf{x}_4 \leq 20 \quad m = 20/8 = 2 \quad L = 8 + 6 = 14
 \end{aligned}$$

separato

Si separa (-):

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \max \quad & 5 + 4 \mathbf{x}_2 + 6 \mathbf{x}_3 + 8 \mathbf{x}_4 \\
 \text{s.t.} \quad & 9 \mathbf{x}_2 + 11 \mathbf{x}_3 + 18 \mathbf{x}_4 \leq 12 \quad m = 12/9 = 1 \quad L = 5 + 8 = 13
 \end{aligned}$$

separato

$$\begin{aligned}
 (0) \quad \max \quad & 4 \mathbf{x}_2 + 6 \mathbf{x}_3 + 8 \mathbf{x}_4 \\
 \text{s.t.} \quad & 9 \mathbf{x}_2 + 11 \mathbf{x}_3 + 18 \mathbf{x}_4 \leq 20 \quad m = 20/9 = 2 \quad L = 8 + 6 = 14
 \end{aligned}$$

separato

Si separa (0):

$$\begin{aligned}
 (01) \quad \max \quad & 4 + 6 \mathbf{x}_3 + 8 \mathbf{x}_4 \\
 \text{s.t.} \quad & 11 \mathbf{x}_3 + 18 \mathbf{x}_4 \leq 11 \quad m = 11/11 = 1 \quad L = 8 + 4 = 12
 \end{aligned}$$

separato

$$\begin{aligned}
 (00) \quad \max \quad & 6 \mathbf{x}_3 + 8 \mathbf{x}_4 \\
 \text{s.t.} \quad & 11 \mathbf{x}_3 + 18 \mathbf{x}_4 \leq 20 \quad m = 20/11 = 1 \quad L = 8
 \end{aligned}$$

non ottimo

Si separa (1):

$$\begin{aligned}
 (11) \quad \max \quad & 5 + 4 + 6 \mathbf{x}_3 + 8 \mathbf{x}_4 \\
 \text{s.t.} \quad & 11 \mathbf{x}_3 + 18 \mathbf{x}_4 \leq 3 \quad m = 3/11 = 0 \quad L = 5 + 4 = 9
 \end{aligned}$$

ammissibile

$$(10) \quad \begin{aligned} \max \quad & 5 + 6x_3 + 8x_4 \\ \text{s.t.} \quad & 11x_3 + 18x_4 \leq 12 \end{aligned} \quad m = 12/11 = 1 \quad L = 5 + 8 = 13$$

separato

Si eliminano (11) perchè ammissibile e (00) perchè peggiore di (11); si separa (10):

$$(101) \quad \begin{aligned} \max \quad & 5 + 6 + 8x_4 \\ \text{s.t.} \quad & 18x_4 \leq 1 \end{aligned} \quad m = 1/18 = 0 \quad L = 5 + 6 = 11$$

ammissibile

$$(100) \quad \begin{aligned} \max \quad & 5 + 8x_4 \\ \text{s.t.} \quad & 18x_4 \leq 12 \end{aligned} \quad m = 12/18 = 0 \quad L = 5$$

ammissibile

Si eliminano (101) e (100) perchè ammissibili; si separa (01):

$$(011) \quad \begin{aligned} \max \quad & 4 + 6 + 8x_4 \\ \text{s.t.} \quad & 18x_4 \leq 0 \end{aligned} \quad m = 0/18 = 0 \quad L = 4 + 6 = 10$$

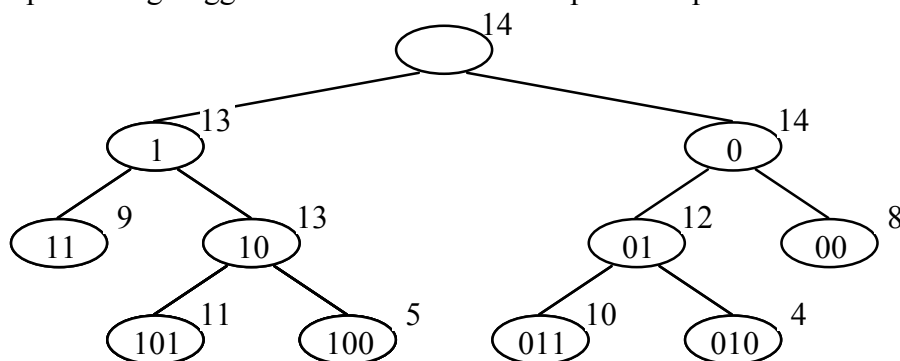
ammissibile

$$(010) \quad \begin{aligned} \max \quad & 4 + 8x_4 \\ \text{s.t.} \quad & 18x_4 \leq 11 \end{aligned} \quad m = 11/18 = 0 \quad L = 4$$

ammissibile

La lista dei sottoproblemi è vuota per cui la soluzione del sottoproblema (101) è ottimale essendo la limitazione massima.

Si devono prendere gli oggetti B e D con valore 11 e peso complessivo 19.



- 2b) La condizione che l'oggetto A viene portato se e solo se viene portato l'oggetto B equivale a unificare gli oggetti A e B in un oggetto AB avente peso 17 e valore 9.

Riordinando gli oggetti per pesi crescenti e introducendo le variabili decisionali 0-1 si ha:

oggetto	D	AB	C
peso	11	17	18
valore	6	9	8
variabile	y_1	y_2	y_3
peso massimo trasportabile = 20			

$$(-) \quad \begin{aligned} \max \quad & 6y_1 + 9y_2 + 8y_3 \\ \text{s.t.} \quad & 11y_1 + 17y_2 + 18y_3 \leq 20 \end{aligned} \quad m = 20/11 = 1 \quad L = 9 \quad \text{separato}$$

Si separa (-):

$$(1) \quad \begin{aligned} \max \quad & 6 + 9y_2 + 8y_3 \\ \text{s.t.} \quad & 17y_2 + 18y_3 \leq 9 \end{aligned} \quad m = 9/17 = 0 \quad L = 6 \quad \text{ammissibile}$$

$$(0) \quad \begin{aligned} \max \quad & 9y_2 + 8y_3 \\ \text{s.t.} \quad & 17y_2 + 18y_3 \leq 20 \end{aligned} \quad m = 20/17 = 1 \quad L = 9 \quad \text{separato}$$

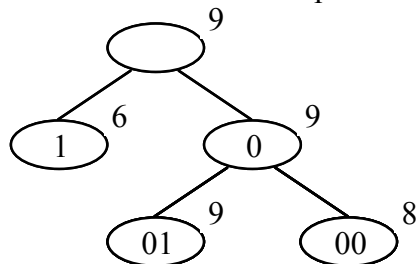
Si elimina (1) perchè ammissibile; si separa (0):

- (01) $\max 9 + 8 y_3$
s.t. $18 y_3 \leq 3$ $m = 3/18 = 0$ $L = 9$ ammissibile
- (00) $\max 8 y_3$
s.t. $18 y_3 \leq 20$ $m = 20/18 = 1$ $L = 8$ non ottimo

Si elimina (01) perchè ammissibile e (00) perchè peggiore di (01).

La lista dei sottoproblemi è vuota per cui la soluzione del sottoproblema (01) è ottimale essendo la limitazione massima.

Si devono prendere gli oggetti A e B con valore 9 e peso complessivo 17.



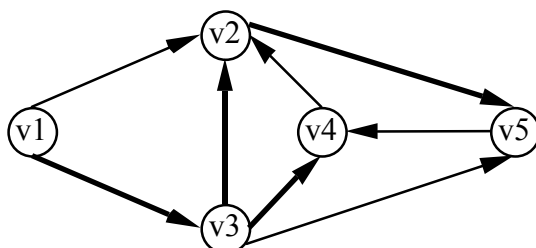
PROVA PARZIALE DEL 26/1/1994

- 1) Sia dato il seguente grafo pesato G :
- $p = \{1, 3, 4, 7, 8, 9\}$
 $u = \{2, 3, 5, 2, 4, 5, 2, 4\}$
 $d = \{5, 2, 1, 2, 1, 4, 2, 1\}$
- a) Determinare i cammini minimi dal vertice v_1 a tutti gli altri utilizzando l'algoritmo di Dijkstra, indicando per ogni iterazione l'insieme S dei vertici la cui etichetta è definitiva, il vettore λ delle etichette e il vettore **pred** dei predecessori. Completare la risoluzione con un disegno che rappresenta i cammini minimi.
- b) Gli archi che compongono i cammini minimi costituiscono uno spanning tree di peso minimo?

SOLUZIONE DELLA PROVA PARZIALE DEL 26/1/1994

- 1a) Applicando l'algoritmo di Dijkstra si ha:

S	λ	pred
v_1	0 5 2 ∞ ∞	1 1 1 - -
$v_1 v_3$	0 4 2 3 6	1 3 1 3 3
$v_1 v_3 v_4$	0 4 2 3 6	1 3 1 3 3
$v_1 v_3 v_4 v_2$	0 4 2 3 5	1 3 1 3 2
$v_1 v_3 v_4 v_2 v_5$		
STOP poichè $S = N$.		



- 1b) I cammini determinati al punto precedente sono orientati e costituiscono una arborescenza,

mentre lo spanning tree non tiene conto dell'orientamento degli archi, per cui l'arborescenza è uno spanning tree ma non necessariamente di peso minimo, pertanto è necessario confrontare il peso dell'arborescenza con il peso di uno spanning tree minimo.

Applicando l'algoritmo di Prim si ottiene:

v_1	0	5	2	∞	∞	(v_1, v_3)
$v_1 v_3$	0	2	0	1	3	$(v_1, v_3), (v_3, v_4)$
$v_1 v_3 v_4$	0	2	0	0	1	$(v_1, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5)$
$v_1 v_3 v_4 v_5$	0	1	0	0	0	$(v_1, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_2)$
$v_1 v_3 v_4 v_5 v_2$						
STOP						

Poichè il peso di uno spanning tree minimo è 5 mentre il peso dell'arborescenza è 6 si deduce che i cammini minimi non costituiscono uno spanning tree minimo.

PROVA SCRITTA DEL 1/2/1994

1) Sia dato il seguente programma lineare **P**:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 - 2x_2 \leq -1 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- I punti **R** (1, 1) ed **S** (3, 2) sono ottimali per **P**?
- Esprimere i punti **A** (2, 3/2) e **B** (5, 3) come combinazione lineare di **R** ed **S**.
- I punti **A** e **B** sono ottimali per **P**?

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 1/2/1994

1a) Risolvendo il programma **P** con l'algoritmo del simplesso si ha:

	x_1	x_2	
u_1	-1	2	-1
u_2	-1	-3 *	9
z	1	-2	0

	x_1	u_2	
u_1	-5/3 *	-2/3	5
x_2	-1/3	-1/3	3
z	5/3	2/3	-6

	u_1	u_2	
x_1	-3/5	-2/5	3
x_2	1/5	-1/5	2
z	-1	0	-1

La soluzione ottenuta è il punto **S**, che risulta ottimale; **R** risulta ottimale in quanto:

$$\begin{aligned} x_1(\mathbf{R}) &= 1 \geq 0 \\ x_2(\mathbf{R}) &= 1 \geq 0 \end{aligned}$$

$$u_1(\mathbf{R}) = -1 + 2 - 1 = 0 \geq 0$$

$$u_2(\mathbf{R}) = -1 - 3 + 9 = 5 \geq 0$$

$$z(\mathbf{R}) = 1 - 2 = -1$$

1b) Utilizzando l'algoritmo del cardine si ha:

	e_1	e_2
R	1 *	1
S	3	2
A	2	3/2
B	5	3

	R	e_2
e_1	1	-1
S	3	-1 *
A	2	-1/2
B	5	-2

	R	S
e_1	-2	1
e_2	3	-1
A	1/2	1/2
B	-1	2

cioè $\mathbf{A} = 1/2 \mathbf{R} + 1/2 \mathbf{S}$ e $\mathbf{B} = -1 \mathbf{R} + 2 \mathbf{S}$

1c) Il punto **A** è ottimale in quanto appartenente al segmento **R** - **S**.

Il punto **B** verifica $z(\mathbf{B}) = 5 - 6 = -1$ ma non è ammissibile in quanto:

$$x_1(\mathbf{B}) = 5 \geq 0$$

$$x_2(\mathbf{B}) = 3 \geq 0$$

$$u_1(\mathbf{B}) = -5 + 6 - 1 = 0 \geq 0$$

$$u_2(\mathbf{B}) = -5 - 9 + 9 = -5 < 0$$

PROVA SCRITTA DEL 21/2/1994

1) Sia dato il seguente programma lineare a variabili 0-1:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 4x_1 + x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 5 \quad (*) \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \quad (*) \\ & x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\} \quad (**) \end{aligned}$$

- Scrivere il rilassamento lagrangiano dei vincoli (*) con moltiplicatori $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, determinare una limitazione L_L del problema risolvendo per ispezione il problema risultante (riportando le considerazioni) e dire se la soluzione ottenuta è ottimale per il problema dato.
- Scrivere il rilassamento surrogato dei vincoli (*) con moltiplicatori $\pi_1 = \pi_2 = 1$, determinare una limitazione L_S del problema risolvendo per ispezione il problema risultante (riportando le considerazioni) e dire se la soluzione ottenuta è ottimale per il problema dato.
- Determinare una limitazione L_E del problema sostituendo i vincoli (**) con gli usuali

vincoli di non negatività risolvendo con l'algoritmo del simplesso il problema risultante (scegliere come variabile uscente la più a sinistra) e dire se la soluzione ottenuta è ottimale per il problema dato.

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 21/2/1994

1a) Il rilassamento richiesto è:

$$\max \quad z_L = x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 7$$

$$\text{s.t.} \quad x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}$$

che risolto per ispezione ($c_1 > 0, c_2, c_3 < 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2, x_3 = 0$) fornisce la soluzione:

$$x_L = (1, 0, 0), z_L(x_L) = 8, L_L = 8.$$

La soluzione ottenuta è ammissibile in quanto:

$$u_1(x_L) = -1 + 0 + 0 + 5 = 4 \geq 0$$

$$u_2(x_L) = -2 + 0 + 0 + 2 = 0 \geq 0$$

ma non si può dire se è ottimale in quanto $z(x_L) = 4 + 0 + 0 = 4$ è diversa da $z_L(x_L)$.

1b) Il rilassamento richiesto è:

$$\max \quad z_S = 4x_1 + x_2 + 2x_3$$

$$\text{s.t.} \quad 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 7$$

$$x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}$$

che risolto per ispezione (essendo $c_1, c_2, c_3 > 0$ e potendo prendere o x_1 e x_2 oppure x_3 conviene prendere x_1 e x_2) fornisce la soluzione:

$$x_S = (1, 1, 0), z_S(x_S) = 5, L_S = 5.$$

La soluzione ottenuta non è ammissibile, quindi neanche ottimale, in quanto:

$$u_1(x_S) = -1 - 2 + 0 + 5 = 2 \geq 0$$

$$u_2(x_S) = -2 - 1 + 0 + 2 = -1 < 0$$

1c) Il rilassamento richiesto è:

$$\max \quad z_E = 4x_1 + x_2 + 2x_3$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 5$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Risolvendo il rilassamento con l'algoritmo del simplesso si ha:

	x_1	x_2	x_3	
u_1	-1	-2	-4	5
u_2	-2 *	-1	-1	2
z_E	4	1	2	0

	u_2	x_2	x_3	
u_1	1/2	-3/2	-7/2	4
x_1	-1/2	-1/2	-1/2	1
z_E	-2	-1	0	4

La soluzione è:

$$x_E = (1, 0, 0), z_E(x_E) = 4, L_E = 4.$$

La soluzione ottenuta è ottimale in quanto si ha $x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}$ e $z = z_E$.

PROVA SCRITTA DEL 14/4/1994

- 1) Risolvere con l'algoritmo di Gomory il seguente problema dello zaino:

oggetto	A	B	C
peso	4	6	8
valore	3	5	4

peso massimo trasportabile = 12

Scegliere la variabile uscente più a sinistra e generare gli iperpiani secanti utilizzando la riga più in alto con termine noto frazionario.

- 2) Sia dato il seguente grafo **G**:

u = (2, 3, 4, 5, 1, 5, 7, 6, 7, 3, 7, 2)

p = (1, 2, 5, 7, 8, 10, 12, 13)

d = (2, 3, 3, 4, -1, -1, 2, -2, 1, 4, 1, -1)

Determinare i cammini minimi da v_1 agli altri nodi con l'algoritmo di correzione modificato, ordinando gli archi secondo la rappresentazione forward star.

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 14/4/1994

- 1) Il problema può essere scritto nella forma:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 \leq 12 \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_2 \leq 1 \\ & x_3 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0; x_1, x_2, x_3 \text{ interi} \end{aligned}$$

Applicando l'algoritmo di Gomory si ha:

	x_1	x_2	x_3	
u₁	-4	-6	-8	12
u₂	-1 *	0	0	1
u₃	0	-1	0	1
u₄	0	0	-1	1
z	3	5	4	0

	u_2	x_2	x_3	
u₁	4	-6	-8	8
x₁	-1	0	0	1
u₃	0	-1 *	0	1
u₄	0	0	-1	1
z	-3	5	4	3

	u_2	u_3	x_3	
u₁	4	6	-8 *	2
x₁	-1	0	0	1
x₂	0	-1	0	1
u₄	0	0	-1	1
z	-3	-5	4	8

	u_2	u_3	u_1	
x_3	1/2	3/4	-1/8	1/4
x_1	-1	0	0	1
x_2	0	-1	0	1
u_4	-1/2	-3/4	1/8	3/4
z	-1	-2	-1/2	9

riga generatrice x_3

	u_2	u_3	u_1	
x_3	1/2	3/4	-1/8	1/4
x_1	-1	0	0	1
x_2	0	-1	0	1
u_4	-1/2	-3/4	1/8	3/4
u_5	1/2 *	1/4	1/8	-1/4
z	-1	-2	-1/2	9

	u_5	u_3	u_1	
x_3	1	1/2	-1/4	1/2
x_1	-2	1/2	1/4	1/2
x_2	0	-1	0	1
u_4	-1	-1/2	1/4	1/2
u_2	2	-1/2	-1/4	1/2
z	-2	-3/2	-1/4	17/2

riga generatrice x_3

	u_5	u_3	u_1	
x_3	1	1/2	-1/4	1/2
x_1	-2	1/2	1/4	1/2
x_2	0	-1	0	1
u_4	-1	-1/2	1/4	1/2
u_2	2	-1/2	-1/4	1/2
u_6	0	1/2	1/4 *	-1/2
z	-2	-3/2	-1/4	17/2

	u_5	u_3	u_6	
x_3	1	1	-1	0
x_1	-2	0	1	1
x_2	0	-1	0	1
u_4	-1	-1	1	1
u_2	2	0	-1	0
u_1	0	-2	4	2
z	-2	-1	-1	8

La soluzione è $x^* = (1, 1, 0)$, $z^* = 8$, cioè si portano gli oggetti A e B con valore 8 e peso 10.

- 2) Applicando l'algoritmo richiesto si ottiene il seguente sviluppo:

d	pred	
0, ∞, ∞, ∞, ∞, ∞, ∞	1, 1, 1, 1, 1, 1, 1	a ₁₂ -
0, 2, ∞, ∞, ∞, ∞, ∞	1, 1, 1, 1, 1, 1, 1	a ₂₃ -
0, 2, 5, ∞, ∞, ∞, ∞	1, 1, 2, 1, 1, 1, 1	a ₂₄ -
0, 2, 5, 5, ∞, ∞, ∞	1, 1, 2, 2, 1, 1, 1	a ₂₅ -
0, 2, 5, 5, 6, ∞, ∞	1, 1, 2, 2, 2, 1, 1	a ₃₁ - a ₃₅ -
0, 2, 5, 5, 4, ∞, ∞	1, 1, 2, 2, 3, 1, 1	a ₄₇ -
0, 2, 5, 5, 4, ∞, 7	1, 1, 2, 2, 3, 1, 4	a ₅₆ -
0, 2, 5, 5, 4, 2, 7	1, 1, 2, 2, 3, 5, 4	a ₅₇ -
0, 2, 5, 5, 4, 2, 5	1, 1, 2, 2, 3, 5, 5	a ₆₃ - a ₆₇ -
0, 2, 5, 5, 4, 2, 3	1, 1, 2, 2, 3, 5, 6	a ₇₂ (1) - a ₁₂ - a ₂₃ - a ₂₄ - a ₂₅ - a ₃₁ - a ₃₅ - a ₄₇ - a ₅₆ - a ₅₇ - a ₆₃ - a ₆₇ - a ₇₂ (2) STOP

PROVA SCRITTA DEL 6/6/1994

1) Sia dato il seguente programma lineare **P**:

	x ₁	x ₂	x ₃	
u ₁	2	-1	-3	1
u ₂	-2	5	-1	5
u ₃	0	1	-1	1
z	4	-13	α	0

- Risolvere il programma **P** nel caso in cui $\alpha = 3$ e determinare la soluzione ottimale **x*** (scegliere la variabile uscente più a sinistra).
- Per quali valori di α il punto **x*** rimane soluzione ottimale?
- Risolvere il programma **P** per qualsiasi valore reale di α e determinare **S**_{ott}.

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 6/6/1994

1a) In base al punto 1b), conviene non sostituire $\alpha = 3$; pertanto si parte con la tabella **T**₀:

	x ₁	x ₂	x ₃	
u ₁	2	-1	-3	1
u ₂	-2	5	-1	5
u ₃	0	1	-1	1
z	4	-13	α	0

Facendo cardine sull'elemento 2, 1 si ottiene la tabella **T**₁:

	u ₂	x ₂	x ₃	
u ₁	-1	4	-4	6
x ₁	-1/2	5/2	-1/2	5/2
u ₃	0	1	-1	1
z	-2	-3	$\alpha-2$	10

Facendo cardine sull'elemento 3, 3 si ottiene la tabella **T**₂:

	u_2	x_2	u_3	
u_1	-1	0	4	2
x_1	-1/2	2	1/2	2
x_3	0	1	-1	1
z	-2	$\alpha-5$	$2-\alpha$	$8+\alpha$

Sostituendo $\alpha = 3$ si ottiene:

$$x^* = (2, 0, 1); z^* = 11$$

- 1b) La tabella precedente risulta ancora ottimale se $\alpha-5 \leq 0$ e $2-\alpha \leq 0$ cioè se:

$$2 \leq \alpha \leq 5$$

Per altri valori la tabella T_2 non è ottimale, ma potrebbe esserlo il punto x^* ; d'altra parte poichè la tabella T_2 è non degenere, eseguendo ulteriori iterazioni del simplesso, il punto x^* non è più ottimale.

- 1c) Esaminando i vari casi si ha:

$\alpha < 2$ Facendo cardine sull'elemento 3, 3 della tabella T_2 si ottiene nuovamente la tabella T_1 che risulta ottimale, per cui si ha:

$$x^* = (5/2, 0, 0); z^* = 10$$

$\alpha = 2$ La tabella T_2 è ottimale, ma poichè il coefficiente di u_3 della riga della funzione obiettivo è nullo e la tabella è non degenere vi sono altre ottimali. Facendo cardine sull'elemento 3, 3 della tabella T_2 si ottiene nuovamente la tabella T_1 che risulta ottimale, per cui si ha:

$$z^* = 10; S_{\text{ott}} = \{x_1^* = -1/2 x_3^* + 5/2; x_2^* = 0; 0 \leq x_3^* \leq 1\}$$

$2 < \alpha < 5$ Per quanto detto al punto B si ha:

$$x^* = (2, 0, 1); z^* = 8+\alpha$$

$\alpha = 5$ La tabella T_2 è ottimale, ma poichè il coefficiente di x_2 della riga della funzione obiettivo è nullo e la tabella è non degenere vi sono altre ottimali. Poichè nella colonna di x_2 non esistono coefficienti negativi il programma presenta uno spigolo illimitato di soluzioni ottimali, per cui si ha:

$$z^* = 13; S_{\text{ott}} = \{x_1^* = 2 x_2^* + 2; x_2^* \geq 0; x_3^* = x_2^* + 1\}$$

$\alpha > 5$ La tabella T_2 non è ottimale poichè il coefficiente di x_2 della riga della funzione obiettivo è positivo, ma poichè nella colonna di x_2 non coefficienti negativi il programma presenta la funzione obiettivo superiormente illimitata, per cui si ha:

$$z^* = +\infty$$

PROVA SCRITTA DEL 5/7/1994

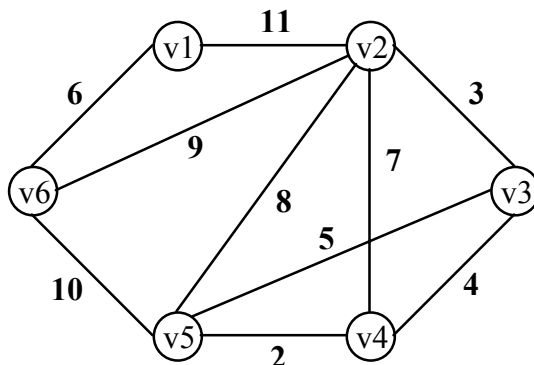
- Una compagnia aerea di voli charter deve assegnare i propri aerei alle diverse rotte. La compagnia copre n rotte, utilizzando m diversi tipi di aerei e dispone di a_i aerei di tipo i . I passeggeri che vogliono volare sulla rotta j sono b_j . Un aereo di tipo i ha una capienza di d_i passeggeri. Facendo volare un aereo di tipo i sulla rotta j la compagnia ha un profitto p_{ij} per ogni passeggero, seguendo la politica di far volare solo aerei al massimo della capienza. Scrivere un modello lineare che permette di determinare gli aerei da assegnare ad ogni rotta, massimizzando il profitto complessivo.
- Sia dato il seguente problema dello zaino:

oggetto	A	B	C	D	E
valore	9	8	7	11	4
peso	13	7	10	12	5

peso massimo trasportabile = 20

Risolverlo con il metodo Branch and Bound scrivendo per ogni sottoproblema la forma analitica e la limitazione. Si scelga per la separazione il sottoproblema con la migliore limitazione. Si eliminino i sottoproblemi non appena si verificano le condizioni per farlo, precisando quali sottoproblemi vengono eliminati e quale criterio è stato utilizzato per ciascuno. Completare la risoluzione con l'albero decisionale.

3) Sia dato il seguente grafo **G**:



Determinare uno spanning tree di peso minimo con l'algoritmo di Kruskal.
Si analizzino gli archi in ordine crescente di indice del primo e del secondo estremo.

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 5/7/1994

1) Definendo le variabili intere x_{ij} come il numero di aerei di tipo **i** assegnati sulla rotta **j** si hanno i vincoli:

$$\sum_j x_{ij} \leq a_i \quad \forall i \quad \text{aerei di tipo } i \text{ disponibili su tutte le rotte}$$

$$\sum_i d_i x_{ij} \leq b_j \quad \forall j \quad \text{gli aerei di tutti i tipi al massimo della capienza sulla rotta } j \text{ non possono portare pi\u00f9 passeggeri di quanti vogliono viaggiare}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \quad \text{il numero di aerei di tipo } i \text{ assegnati sulla rotta } j \text{ \u00e8 non negativo}$$

e la funzione obiettivo:

$$\max \sum_i \sum_j p_{ij} d_i x_{ij} \quad \text{numero di passeggeri trasportati per il rispettivo profitto}$$

2) Riordinando gli oggetti per pesi crescenti e introducendo le variabili decisionali si ha:

oggetto	E	B	C	D	A
valore	4	8	7	11	9
peso	5	7	10	12	13
variabile	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5

peso massimo trasportabile = 20

$$(-) \quad \max \quad 4 x_1 + 8 x_2 + 7 x_3 + 11 x_4 + 9 x_5$$

$$\text{s.t.} \quad 5 x_1 + 7 x_2 + 10 x_3 + 12 x_4 + 13 x_5 \leq 20$$

$$m = 20/5 = 4 \quad L = 35 \quad \text{separato}$$

Si separa (-):

$$(0) \quad \max \quad 8 x_2 + 7 x_3 + 11 x_4 + 9 x_5$$

$$\text{s.t.} \quad 7 x_2 + 10 x_3 + 12 x_4 + 13 x_5 \leq 20 \quad m = 20/7 = 2 \quad L = 20 \quad \text{separato}$$

$$(1) \quad \begin{array}{ll} \max & 4 + 8x_2 + 7x_3 + 11x_4 + 9x_5 \\ \text{s.t.} & 7x_2 + 10x_3 + 12x_4 + 13x_5 \leq 15 \end{array} \quad m = 15/7 = 2 \quad L = 24 \quad \text{separato}$$

Si separa (1):

$$(10) \quad \begin{array}{ll} \max & 4 + 7x_3 + 11x_4 + 9x_5 \\ \text{s.t.} & 10x_3 + 12x_4 + 13x_5 \leq 15 \end{array} \quad m = 15/10 = 1 \quad L = 15 \quad \text{non ottimo}$$

$$(11) \quad \begin{array}{ll} \max & 4 + 8 + 7x_3 + 11x_4 + 9x_5 \\ \text{s.t.} & 10x_3 + 12x_4 + 13x_5 \leq 8 \end{array} \quad m = 8/10 = 0 \quad L = 12 \quad \text{ammissibile}$$

Si elimina (11) perchè ammissibile e si separa (0):

$$(00) \quad \begin{array}{ll} \max & 7x_3 + 11x_4 + 9x_5 \\ \text{s.t.} & 10x_3 + 12x_4 + 13x_5 \leq 20 \end{array} \quad m = 20/10 = 2 \quad L = 20 \quad \text{separato}$$

$$(01) \quad \begin{array}{ll} \max & 8 + 7x_3 + 11x_4 + 9x_5 \\ \text{s.t.} & 10x_3 + 12x_4 + 13x_5 \leq 13 \end{array} \quad m = 13/10 = 1 \quad L = 19 \quad \text{separato}$$

Si separa (00):

$$(000) \quad \begin{array}{ll} \max & 11x_4 + 9x_5 \\ \text{s.t.} & 12x_4 + 13x_5 \leq 20 \end{array} \quad m = 20/12 = 1 \quad L = 11 \quad \text{non ottimo}$$

$$(001) \quad \begin{array}{ll} \max & 7 + 11x_4 + 9x_5 \\ \text{s.t.} & 12x_4 + 13x_5 \leq 10 \end{array} \quad m = 10/12 = 0 \quad L = 7 \quad \text{ammissibile}$$

Si eliminano (001) perchè ammissibile e (000) perchè non migliore di (11) che è ammissibile; si separa (01):

$$(010) \quad \begin{array}{ll} \max & 8 + 11x_4 + 9x_5 \\ \text{s.t.} & 12x_4 + 13x_5 \leq 13 \end{array} \quad m = 13/12 = 1 \quad L = 19 \quad \text{separato}$$

$$(011) \quad \begin{array}{ll} \max & 8 + 7 + 11x_4 + 9x_5 \\ \text{s.t.} & 12x_4 + 13x_5 \leq 3 \end{array} \quad m = 3/10 = 0 \quad L = 15 \quad \text{ammissibile}$$

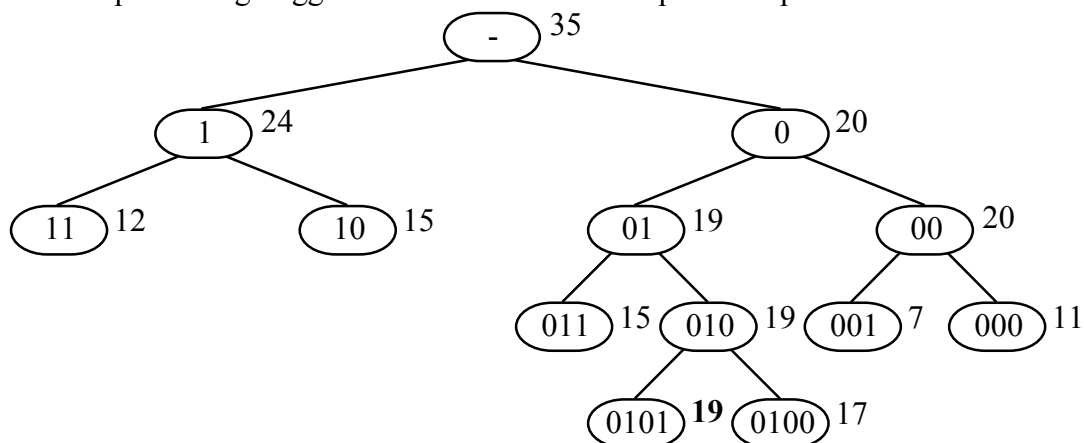
Si eliminano (011) perchè ammissibile e (10) perchè non migliore di (011) che è ammissibile; si separa (010):

$$(0100) \quad \begin{array}{ll} \max & 8 + 9x_5 \\ \text{s.t.} & 13x_5 \leq 13 \end{array} \quad m = 13/13 = 1 \quad L = 17 \quad \text{non ottimo}$$

$$(0101) \quad \begin{array}{ll} \max & 8 + 11 + 9x_5 \\ \text{s.t.} & 13x_5 \leq 1 \end{array} \quad m = 1/13 = 0 \quad L = 19 \quad \text{ammissibile}$$

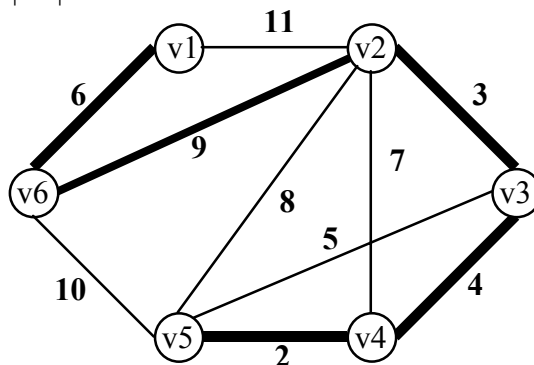
Si eliminano (0101) perchè ammissibile e (0100) perchè non migliore di (0101) che è ammissibile; la lista dei sottoproblemi è vuota per cui la soluzione del sottoproblema (0101) è ottimale essendo la limitazione massima.

Si devono prendere gli oggetti B e D con valore 19 e peso complessivo 19.



3) Si ordinano gli archi per pesi crescenti, quindi si ha:

(v_4, v_5)	inserito	$ T = 1$; peso = 2
(v_2, v_3)	inserito	$ T = 2$; peso = 5
(v_3, v_4)	inserito	$ T = 3$; peso = 9
(v_3, v_5)	non inserito (crea il ciclo v_3, v_5, v_4, v_3)	
(v_1, v_6)	inserito	$ T = 4$; peso = 15
(v_2, v_4)	non inserito (crea il ciclo v_2, v_4, v_3, v_2)	
(v_2, v_5)	non inserito (crea il ciclo v_2, v_5, v_4, v_3, v_2)	
(v_2, v_6)	inserito	$ T = 5$; peso = 24
STOP	$ T = N - 1$	



PROVA SCRITTA DEL 16/9/1994

1) Risolvere con l'algoritmo Branch and Bound il problema del commesso viaggiatore avente la seguente matrice dei costi C , in cui c_{IJ} indica il costo del percorso da I a J ($c_{IJ} = M$ indica che non è possibile il percorso da I a J):

	A	B	C	D	E
A	M	9	7	5	6
B	9	M	3	7	8
C	4	5	M	8	9
D	9	9	4	M	5
E	3	9	7	6	M

Scegliere per la separazione il sottoproblema con la miglior limitazione.

Si eliminino i sottoproblemi non appena si verificano le condizioni per farlo, precisando quali sottoproblemi vengono eliminati e il criterio utilizzato per ciascuno.

Nel calcolo delle limitazioni ridurre la matrice prima per righe e poi per colonne. Nei casi equivalenti separare rispetto al percorso avente il primo indice minore.

Completare la risoluzione con l'albero decisionale.

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 16/9/1994

1) Sottraendo ad ogni riga il minimo, rispettivamente 5 - 3 - 4 - 4 - 3, si ottiene:

	A	B	C	D	E
A	M	4	2	0	1
B	6	M	0	4	5
C	0	1	M	4	5
D	5	5	0	M	1
E	0	6	4	3	M

Sottraendo ad ogni colonna il minimo, rispettivamente 0 - 1 - 0 - 0 - 1, e indicando in apice i costi delle alternative ai percorsi di costo nullo, si ottiene:

	A	B	C	D	E
A	M	3	2	0 ³	0 ⁰
B	6	M	0 ⁴	4	4
C	0 ⁰	0 ³	M	4	4
D	5	4	0 ⁰	M	0 ⁰
E	0 ³	5	4	3	M

La limitazione iniziale è $L = 21$

Separando il problema si ottiene:

(B > C)

Ponendo $c_{CB} = M$, sottraendo alla seconda colonna il minimo che vale 3 e indicando in apice i costi delle alternative ai percorsi di costo nullo, si ottiene:

	A	B	D	E
A	M	0 ¹	0 ³	0 ⁰
C	0 ⁴	M	4	4
D	5	1	M	0 ⁰
E	0 ²	2	3	M

La limitazione è $L = 21 + 3 = 24$

(not **B > C**)

La limitazione è $L = 21 + 4 = 25$

Separando il problema **(B > C)** si ottiene:

(B > C) (C > A)

Ponendo $c_{AB} = M$, sottraendo alla terza riga il minimo che vale 2 e indicando in apice i costi delle alternative ai percorsi di costo nullo, si ottiene:

	B	D	E
A	M	0 ¹	0 ⁰
D	1	M	0 ¹
E	0 ²	1	M

La limitazione è $L = 24 + 2 = 26$

(B > C) (not C > A)

La limitazione è $L = 24 + 4 = 28$

Riprendendo il problema (not **B > C**) con $c_{BC} = M$, sottraendo alla seconda riga il minimo che vale 4 e indicando in apice i costi delle alternative ai percorsi di costo nullo, si ottiene:

	A	B	C	D	E
A	M	3	2	0 ⁰	0 ⁰
B	2	M	M	0 ⁰	0 ⁰
C	0 ⁰	0 ³	M	4	4
D	5	4	0 ²	M	0 ⁰
E	0 ³	5	4	3	M

Separando il problema (not **B > C**) si ottiene:

(not **B > C**) **(C > B)**

Indicando in apice i costi delle alternative ai percorsi di costo nullo, si ottiene:

	A	C	D	E
A	M	2	0 ⁰	0 ⁰
B	2	M	0 ⁰	0 ⁰
D	5	0 ²	M	0 ⁰
E	0 ⁵	4	3	M

La limitazione è $L = 25$

(not $B > C$) (not $C > B$)

La limitazione è $L = 25 + 3 = 28$

Separando il problema (not $B > C$) ($C > B$) si ottiene:

(not $B > C$) ($C > B$) ($E > A$)

Ponendo $c_{AE} = M$ e indicando in apice i costi delle alternative ai percorsi di costo nullo, si ottiene:

	C	D	E
A	2	0 2	M
B	M	0 0	0 0
D	0 2	M	0 0

La limitazione è $L = 25$

(not $B > C$) ($C > B$) (not $E > A$)

La limitazione è $L = 25 + 5 = 30$

Separando il problema (not $B > C$) ($C > B$) ($E > A$) si ottiene:

(not $B > C$) ($C > B$) ($E > A$) ($A > D$)

Ponendo $c_{DE} = M$ e indicando in apice i costi delle alternative ai percorsi di costo nullo, si ottiene:

	C	E
B	M	0 M
D	0 M	M

La limitazione è $L = 25$

(not $B > C$) ($C > B$) ($E > A$) (not $A > D$)

La limitazione è $L = 25 + 2 = 27$

Separando il problema (not $B > C$) ($C > B$) ($E > A$) ($A > D$) si ottiene:

(not $B > C$) ($C > B$) ($E > A$) ($A > D$) ($B > E$, $D > C$)

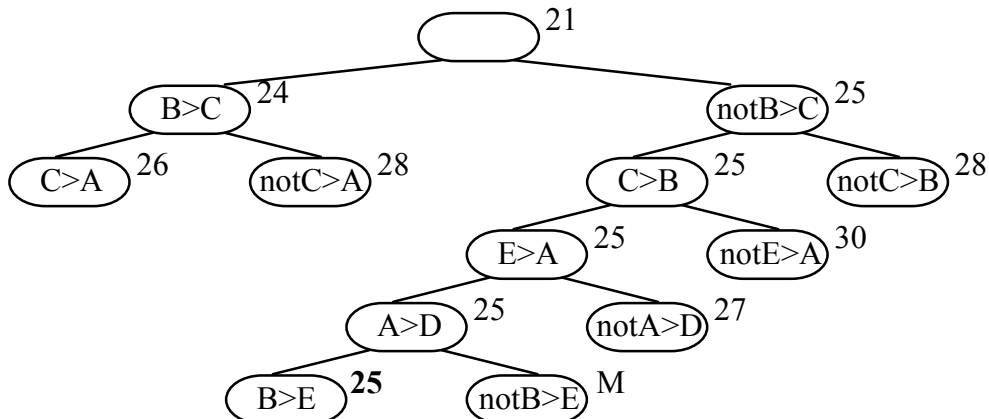
La soluzione è ammissibile e la limitazione è $L = 25$

(not $B > C$) ($C > B$) ($E > A$) ($A > D$) (not $B > E$)

La limitazione è $L = 25 + M = M$

Poichè la limitazione del problema (not $B > C$) ($C > B$) ($E > A$) ($A > D$) ($B > E$, $D > C$) è la migliore e la soluzione è ammissibile si eliminano tutti i problemi pendenti; la lista dei problemi è vuota e la soluzione ottenuta è ottimale.

Il percorso richiesto è $A > D > C > B > E > A$ avente costo $5 + 4 + 5 + 8 + 3 = 25$.



PROVA SCRITTA DEL 30/9/1994

- 1) Sia dato il seguente programma lineare P a variabili 0-1:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 9x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 7x_4 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 3 \quad (*) \\ & 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 \leq 2 \quad (*) \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0-1\} \end{aligned}$$

Definire il rilassamento lagrangiano dei vincoli (*) P_L con moltiplicatori unitari e determinare una soluzione ottimale del problema P_L per ispezione. Dire se la soluzione ottenuta è ottimale per il problema P .

Nel caso non sia ottimale incrementare di una unità il moltiplicatore corrispondente al vincolo più violato, determinando un nuovo rilassamento lagrangiano e la relativa soluzione ottimale per ispezione, ripetendo il procedimento finché non si determina la soluzione ottimale di P .

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 30/9/1994

$$\begin{aligned} 1) \quad P_{L(1,1)}: \max \quad & z_{L(1,1)} = 9x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 7x_4 + (-5x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 5) = \\ & = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5 \\ \text{s.t.} \quad & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0-1\} \\ & x_{L(1,1)} = (1, 1, 1, 1), z_{L(1,1)} = 18 \end{aligned}$$

La soluzione non è ammissibile per P in quanto i vincoli valgono:

$$\begin{aligned} 3 - 2 + 4 + 5 &\leq 3 \Rightarrow 10 \leq 3 \quad \text{NO} \\ 2 + 4 - 1 - 2 &\leq 2 \Rightarrow 3 \leq 2 \quad \text{NO} \end{aligned}$$

Incrementando il moltiplicatore del primo vincolo di una unità si ha:

$$\begin{aligned} P_{L(2,1)}: \max \quad & z_{L(2,1)} = 9x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 7x_4 + (-8x_1 - 7x_3 - 8x_4 + 8) = \\ & = x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_4 + 8 \\ \text{s.t.} \quad & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0-1\} \\ & x_{L(2,1)} = (1, 1, 0, 0), z_{L(2,1)} = 14 \end{aligned}$$

La soluzione non è ammissibile per P in quanto i vincoli valgono:

$$\begin{aligned} 3 - 2 + 0 + 0 &\leq 3 \Rightarrow 1 \leq 3 \quad \text{OK} \\ 2 + 4 - 0 - 0 &\leq 2 \Rightarrow 6 \leq 2 \quad \text{NO} \end{aligned}$$

Incrementando il moltiplicatore del secondo vincolo di una unità si ha:

$$\begin{aligned} P_{L(2,2)}: \max \quad & z_{L(2,2)} = 9x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 7x_4 + (-10x_1 - 4x_2 - 6x_3 - 6x_4 + 10) = \\ & = -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 10 \\ \text{s.t.} \quad & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0-1\} \\ & x_{L(2,2)} = (0, 1, 0, 1), z_{L(2,2)} = 12 \end{aligned}$$

La soluzione è ottimale per P in quanto i vincoli valgono:

$$\begin{aligned} 0 - 2 + 0 + 5 &\leq 3 \Rightarrow 3 \leq 3 \quad \text{OK} \\ 0 + 4 - 0 - 2 &\leq 2 \Rightarrow 2 \leq 2 \quad \text{OK} \end{aligned}$$

e la funzione obiettivo:

$$z(x_{L(2,2)}) = 0 + 5 + 0 + 7 = 12 = z_{L(2,2)}.$$

PROVA SCRITTA DEL 2/11/1994

- 1) Risolvere con l'algoritmo di Gomory il seguente programma lineare intero:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 12 x_1 - 22 x_2 - 3 x_3 \\
 \text{s.t.} \quad & 12 x_1 - 8 x_2 + 3 x_3 \leq 6 \\
 & 12 x_1 - 8 x_2 - 3 x_3 \leq 12 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0 ; x_1, x_2, x_3 \text{ interi}
 \end{aligned}$$

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 2/11/1994

1) Applicando l'algoritmo richiesto si ha:

	x_1	x_2	x_3	
u_1	-12 *	8	-3	6
u_2	-12	8	3	12
z	12	-22	-3	0

	u_1	x_2	x_3	
x_1	-1/12	2/3	-1/4	1/2
u_2	1	0	6	6
z	-1	-14	-6	6

La tabella è ottimale, ma la soluzione $x = (1/2, 0, 0)$ non è intera; utilizzando la riga di x_1 si genera il vincolo u_3 .

	u_1	x_2	x_3	
x_1	-1/12	2/3	-1/4	1/2
u_2	1	0	6	6
u_3	1/12 *	1/3	1/4	-1/2
z	-1	-14	-6	6

	u_3	x_2	x_3	
x_1	-1	1	0	0
u_2	12	-4	3	12
u_1	12	-4	-3	6
z	-12	-10	-3	0

La tabella è ottimale e la soluzione è intera, per cui si ha:

$$x^* = (0, 0, 0) ; z^* = 0$$

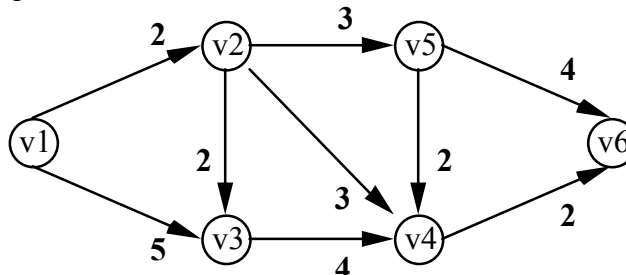
PROVA SCRITTA DEL 9/1/1995

1) Sia dato il seguente problema lineare **P**:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & z = 2 x_1 + x_2 + 3 x_3 \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 + x_3 \leq 2 \\
 & x_1 + 2 x_2 - 6 x_3 \geq 1 \\
 & -x_1 + 2 x_2 - 3 x_3 \leq 1 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

- a - Risolvere **P** con l'algoritmo del simplesso, scegliendo la variabile uscente più a sinistra e la variabile entrante più in alto.
- b - Determinare come è fatto l'insieme ammissibile S_a .

- 2) Sia dato il seguente problema di flusso massimo da v_1 a v_6 , in cui gli archi hanno le capacità minime nulle e le capacità massime indicate:



- Risolvere il problema con l'algoritmo di Ford e Fulkerson, analizzando i nodi e gli archi in ordine crescente di indici; ridisegnare la rete ad ogni iterazione, riportando le etichette di ogni nodo.
- Determinare un taglio di capacità minima.
- Aumentando la capacità di quale arco si ottiene certamente un aumento del flusso massimo?

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 9/1/1995

- 1a) Applicando l'algoritmo richiesto si ottiene:

	x_1	x_2	x_3	
u_1	-1 *	1	-1	2
u_2	1	2	-6	-1
u_3	1	-2	3	1
z	2	1	3	0

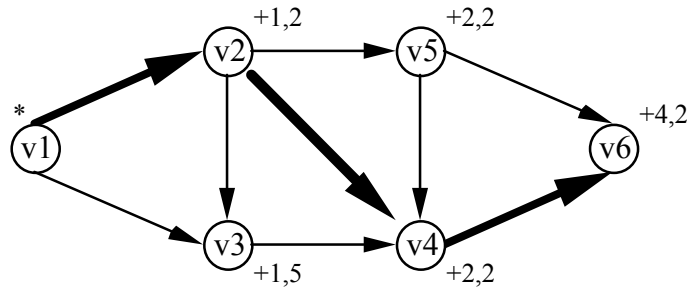
	u_1	x_2	x_3	
x_1	-1	1	-1	2
u_2	-1	3	-7	1
u_3	-1	-1 *	2	3
z	-2	3	1	4

	u_1	u_3	x_3	
x_1	-2	-1	1	5
u_2	-4	-3	-1 *	10
x_2	-1	-1	2	3
z	-5	-3	7	13

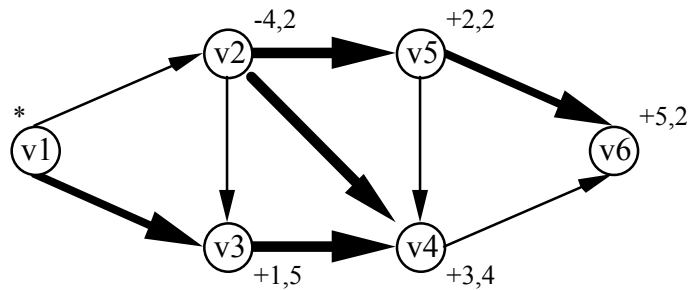
	u_1	u_3	u_2	
x_1	-6	-4	-1	15
x_3	-4	-3	-1	10
x_2	-9	-7	-2	23
z	-33	-24	-7	83

- 1b) Dalla riga di x_1 (oppure x_2 , o x_3) che ha i coefficienti negativi e il termine noto positivo si ricava che S_a è un poliedro convesso.

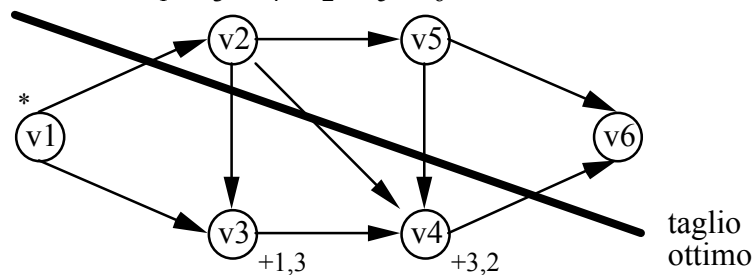
2a) Applicando l'algoritmo richiesto si ha:



Cammino aumentante: $v_1 - v_2 - v_4 - v_6$ con $\Delta = 2$.



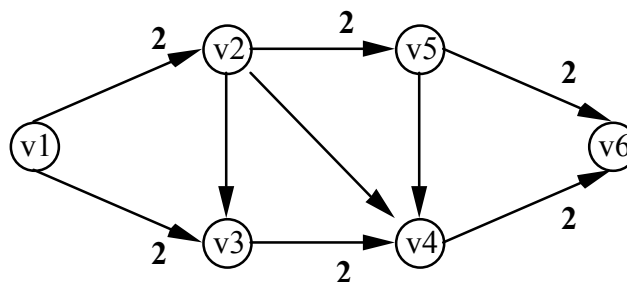
Cammino aumentante: $v_1 - v_3 - v_4 - v_2 - v_5 - v_6$ con $\Delta = 2$.



STOP (non si può etichettare v_6)

Flusso massimo = 4

Flussi ottimali:



2b) Taglio ottimo = $\{ a_{12}, a_{46} \}$

Capacità = $2 + 2 = 4$

2c) Aumentando la capacità dell'arco a_{46} il flusso massimo aumenta certamente poichè aumentando la capacità si può etichettare v_6 .