PROVE D'ESAME 1994/95

PROVA PARZIALE DEL 21/11/94

1) Sia dato il seguente programma lineare:

$$\begin{aligned} \max\ & 2\mathbf{x}_1 + 3\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 \\ \text{s.t.}\ & 2\mathbf{x}_1 + 3\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 \le 5 \\ & 2\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 \le 5 \\ & 4\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 \le 15 \\ & \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \ge 0 \end{aligned}$$

a - Dire se il punto **P** (3, 0, 1) è ammissibile e perchè.
b - Dire se il punto **P** è un vertice e perchè.
c - Dire se il punto **P** appartiene all'insieme ottimale e perchè.
TEMPO SUGGERITO: 20m

2) Una ditta ha vuole costituire alcune filiali su **m** distretti. Per ragioni di concorrenza non vuole aprire filiali su distretti confinanti.
Detto $\mathbf{c}_i$ il profitto che si ha costituendo una filiale sul distretto **i**, scrivere un modello lineare intero per determinare su quali distretti costituire le filiali in modo da massimizzare i profitti.
TEMPO SUGGERITO: 15m

3) Sia dato il PLI **P**:

$$\begin{aligned} \max\ & \mathbf{z} = 10\mathbf{x}_1 + 16\mathbf{x}_2 + 7\mathbf{x}_3 + 7\mathbf{x}_4 + 18\mathbf{x}_5 \\ \text{s.t.}\ & 2\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + 2\mathbf{x}_3 + 4\mathbf{x}_4 + 3\mathbf{x}_5 \le 6 \\ & 4\mathbf{x}_1 + 6\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4 + 7\mathbf{x}_5 \le 12 \\ & \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

a - Scrivere il problema $\mathbf{P}_S$ ottenuto col rilassamento surrogato dei vincoli di disuguaglianza di **P** con moltiplicatori unitari.
b - Risolvere con la strategia highest-first e le tecniche di accelerazione il problema $\mathbf{P}_S$.
c - Dire se la soluzione ottimale di $\mathbf{P}_S$ è ottimale per **P** e perchè.
TEMPO SUGGERITO: 30m

SOLUZIONE DELLA PROVA PARZIALE DEL 21/11/94

1a) Il punto **P** è ammissibile se verifica i vincoli del problema.

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}_1(\mathbf{P}) = 3 \ge 0 && \mathbf{u}_1(\mathbf{P}) = -6 + 0 + 1 + 5 = 0 \ge 0 \\ &\mathbf{x}_2(\mathbf{P}) = 0 \ge 0 && \mathbf{u}_2(\mathbf{P}) = -6 + 0 + 1 + 5 = 0 \ge 0 \\ &\mathbf{x}_3(\mathbf{P}) = 1 \ge 0 && \mathbf{u}_3(\mathbf{P}) = -12 + 0 - 1 + 15 = 2 \ge 0 \end{aligned}$$

1b) Il punto **P** è un vertice se appartiene ad almeno tre iperpiani generatori linearmente indipendenti. Dal punto a) si vede che **P** appartiene agli iperpiani generatori $\mathbf{x}_2 = 0$, $\mathbf{u}_1 = 0$ e $\mathbf{u}_2 = 0$. Con il procedimento del cardine si può verificare se sono linearmente indipendenti (si può inserire in tabella anche la funzione obiettivo in previsione del punto c)):

	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	
$\mathbf{u}_1$	-2 *	-3	1	5
$\mathbf{u}_2$	-2	-1	1	5
$\mathbf{u}_3$	-4	1	-1	15
$\mathbf{z}$	2	3	-1	0

	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	
$\mathbf{x}_1$	-1/2	-3/2	1/2	5/2
$\mathbf{u}_2$	1	2	0	0
$\mathbf{u}_3$	2	7	-3	5
$\mathbf{z}$	-1	0	0	5

Poichè non è possibile portare in base $\mathbf{u}_2$ insieme a $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{x}_2$ gli iperpiani generatori non sono linearmente indipendenti e il punto **P** non è un vertice.

1c) Il punto **P** appartiene all'insieme ottimale se $\mathbf{z}(\mathbf{P}) = 6 + 0 - 1 = 5$ è uguale al valore massimo del problema. Dalla tabella precedente che è ottimale si vede che $\mathbf{z}^* = 5$ e quindi il punto **P** appartiene all'insieme ottimale.

2) Definendo le variabili 0-1 $\mathbf{x}_i$ come:

$\mathbf{x}_i =$ 1 se si costituisce una filiale sul distretto **i**

0 altrimenti

si hanno i vincoli: $\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j \leq 1$ se i distretti **i** e **j** sono confinanti

e la funzione obiettivo: max $\sum_i \mathbf{c}_i \mathbf{x}_i$ profitti della costituzione delle filiali

3a) Il problema $\mathbf{P}_S$ è:

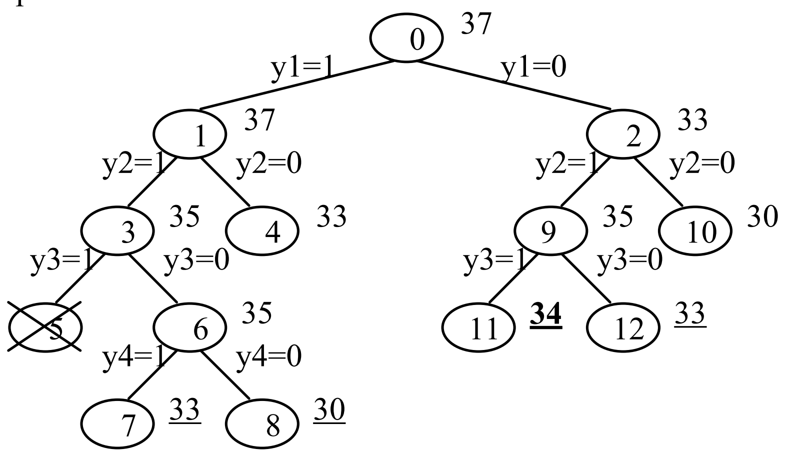
max $z_S = 10\,\mathbf{x}_1 + 16\,\mathbf{x}_2 + 7\,\mathbf{x}_3 + 7\,\mathbf{x}_4 + 18\,\mathbf{x}_5$

s.t. $6\,\mathbf{x}_1 + 7\,\mathbf{x}_2 + 3\,\mathbf{x}_3 + 5\,\mathbf{x}_4 + 10\,\mathbf{x}_5 \leq 18$

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5 \in \{0, 1\}$

3b) $\mathbf{P}_S$ equivale a un problema dello zaino; riordinando gli oggetti per rapporti decrescenti valore/peso si ha:

Oggetto	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_5$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_4$
Valore	7	16	18	10	7
Peso	3	7	10	6	5
Variabile associata	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
Peso trasportabile	18				



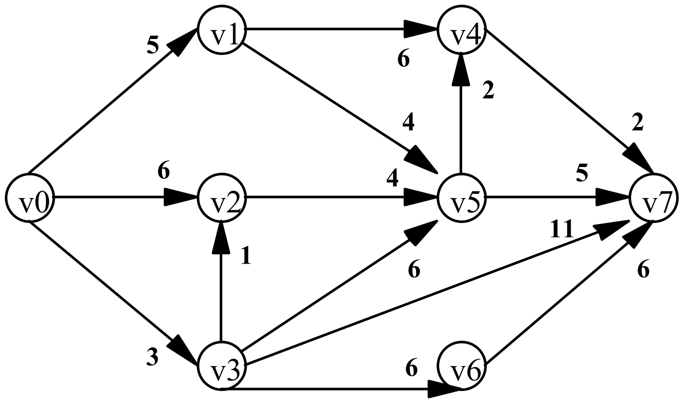
3c) La soluzione ottimale $x_S = (0, 1, 0, 0, 1)$, $z_S = 34$ non è ottimale per **P** perchè non è ammissibile:

$\mathbf{u}_1(x_S) = 0 - 1 + 0 + 0 - 3 + 6 = 2 \geq 0$

$\mathbf{u}_2(x_S) = 0 - 6 + 0 + 0 - 7 + 12 = - 1 < 0$

PROVA PARZIALE DEL 30/1/1995

1) Sia dato il seguente grafo pesato, per il quale è riportato vicino ad ogni arco il relativo costo:



Determinare il cammino di costo minimo da $\mathbf{v}_0$ a $\mathbf{v}_7$ con l'algoritmo di Dijkstra.

Per ogni iterazione si indichino il vettore **d** delle etichette temporanee, il vettore **p** dei predecessori e l'indice **h** dell'etichetta che diventa esatta.

TEMPO SUGGERITO 25m

SOLUZIONE DELLA PROVA PARZIALE DEL 30/1/95

1) Applicando l'algoritmo richiesto si ha:

$\mathbf{d} = (\mathbf{0}, 5, 6, 3, \infty, \infty, \infty, \infty)$ $\quad \mathbf{p} = (0, 0, 0, 0, -, -, -, -)$ $\quad \mathbf{h} = 3$

$\mathbf{d} = (\mathbf{0}, 5, 4, \mathbf{3}, \infty, 9, 9, 14)$ $\quad \mathbf{p} = (0, 0, 3, 0, -, 3, 3, 3)$ $\quad \mathbf{h} = 2$

$\mathbf{d} = (\mathbf{0}, 5, \mathbf{4}, \mathbf{3}, \infty, 8, 9, 14)$ $\quad \mathbf{p} = (0, 0, 3, 0, -, 2, 3, 3)$ $\quad \mathbf{h} = 1$

$\mathbf{d} = (\mathbf{0}, \mathbf{5}, \mathbf{4}, \mathbf{3}, 11, 8, 9, 14)$ $\quad \mathbf{p} = (0, 0, 3, 0, 1, 2, 3, 3)$ $\quad \mathbf{h} = 5$

$\mathbf{d} = (\mathbf{0}, \mathbf{5}, \mathbf{4}, \mathbf{3}, 10, \mathbf{8}, 9, 13)$ $\quad \mathbf{p} = (0, 0, 3, 0, 5, 2, 3, 5)$ $\quad \mathbf{h} = 6$

$\mathbf{d} = (\mathbf{0}, \mathbf{5}, \mathbf{4}, \mathbf{3}, 10, \mathbf{8}, \mathbf{9}, 13)$ $\quad \mathbf{p} = (0, 0, 3, 0, 5, 2, 3, 5)$ $\quad \mathbf{h} = 4$

$\mathbf{d} = (\mathbf{0}, \mathbf{5}, \mathbf{4}, \mathbf{3}, \mathbf{10}, \mathbf{8}, \mathbf{9}, 12)$ $\quad \mathbf{p} = (0, 0, 3, 0, 5, 2, 3, 4)$ $\quad \mathbf{h} = 7$

STOP (l'etichetta di $\mathbf{v}_7$ è esatta)

Il cammino di costo minimo da $\mathbf{v}_0$ a $\mathbf{v}_7$ è $\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_5 - \mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_7$ e ha costo 12.

PROVA SCRITTA DEL 1/2/1995

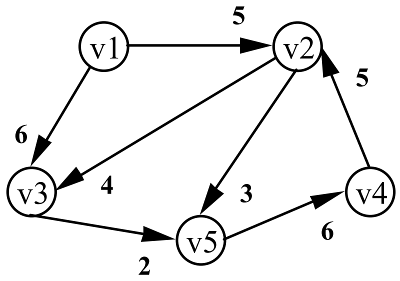
1) Risolvere con l'algoritmo di Gomory il seguente PLI:

$$\begin{array}{ll} \max & \mathbf{z} = 3\,\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 - 3\,\mathbf{x}_3 \\ \text{s.t.} & \mathbf{x}_1 - 2\,\mathbf{x}_2 - 3\,\mathbf{x}_3 \leq -1 \\ & 2\,\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3 \leq 3 \\ & \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \geq 0 \text{ e interi} \end{array}$$

Si scelga la variabile uscente più a sinistra e la variabile entrante più in alto e si generino i tagli utilizzando la riga più in alto.

TEMPO SUGGERITO: 35m

2) Determinare con l'algoritmo di Prim uno spanning tree di peso minimo per il seguente grafo, in cui i valori accanto agli archi indicano i pesi:



Si esaminimo nodi ed archi in ordine crescente di indice.
Per ogni iterazione riportare l'albero corrente **T**(**N**', **A**'), indicando gli elementi di **N**' e di **A**'.
TEMPO SUGGERITO 15m

SOLUZIONE DELLA PROVA DEL 1/2/1995

1) Applicando l'algoritmo richiesto si ha:

	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	
$\mathbf{u}_1$	-1	2 *	3	-1
$\mathbf{u}_2$	-2	0	1	3
$\mathbf{z}$	3	-1	-3	0

	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{x}_3$	
$\mathbf{x}_2$	1/2	1/2	-3/2	1/2
$\mathbf{u}_2$	-2 *	0	1	3
$\mathbf{z}$	5/2	-1/2	-3/2	-1/2

	$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{x}_3$	
$\mathbf{x}_2$	-1/4	1/2	-5/4	5/4
$\mathbf{x}_1$	-1/2	0	1/2	3/2
$\mathbf{z}$	-5/4	-1/2	-1/4	13/4

La tabella è ottimale ma $\mathbf{x} = (3/2, 5/4, 0)$, $\mathbf{z} = 13/4$ non è intera; dalla riga di $\mathbf{x}_2$ si genera $\mathbf{u}_3$:

	$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{x}_3$	
$\mathbf{x}_2$	-1/4	1/2	-5/4	5/4
$\mathbf{x}_1$	-1/2	0	1/2	3/2
$\mathbf{u}_3$	1/4	1/2 *	1/4	-1/4
$\mathbf{z}$	-5/4	-1/2	-1/4	13/4

	$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{u}_3$	$\mathbf{x}_3$	
$\mathbf{x}_2$	-1/2	1	-3/2	3/2
$\mathbf{x}_1$	-1/2	0	1/2	3/2
$\mathbf{u}_1$	-1/2	2	-1/2	1/2
$\mathbf{z}$	-1	-1	0	3

La tabella è ottimale ma $\mathbf{x} = (3/2, 3/2, 0)$, $\mathbf{z} = 3$ non è intera; dalla riga di $\mathbf{x}_2$ si genera $\mathbf{u}_4$:

	u_2	u_3	x_3	
x_2	-1/2	1	-3/2	3/2
x_1	-1/2	0	1/2	3/2
u_1	-1/2	2	-1/2	1/2
u_4	1/2	0	1/2 *	-1/2
z	-1	-1	0	3

	u_2	u_3	u_4	
x_2	1	1	-3	0
x_1	-1	0	1	2
u_1	0	2	-1	0
x_3	-1	0	2	1
z	-1	-1	0	3

La tabella è ottimale e la soluzione $\mathbf{x}^* = (2, 0, 1)$, $\mathbf{z}^* = 3$ è intera.

2) $\mathbf{N}' = \{ \mathbf{v}_1 \}$ $\quad$ $\mathbf{A}' = \emptyset$
$\mathbf{N}' = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \}$ $\quad$ $\mathbf{A}' = \{ \mathbf{a}_{12} \}$
$\mathbf{N}' = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_5 \}$ $\quad$ $\mathbf{A}' = \{ \mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_{25} \}$
$\mathbf{N}' = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_3 \}$ $\quad$ $\mathbf{A}' = \{ \mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_{25}, \mathbf{a}_{35} \}$
$\mathbf{N}' = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \}$ $\quad$ $\mathbf{A}' = \{ \mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_{25}, \mathbf{a}_{35}, \mathbf{a}_{42} \}$
STOP ($\mathbf{N}' = \mathbf{N}$)
Peso = 5 + 3 + 2 + 5 = 15

PROVA SCRITTA DEL 24/2/1995

1) Un'industria produce tre differenti beni A, B, C utilizzando due risorse S, T.
Un'unità di bene A richiede 2 ore di lavorazione, 3 unità di risorsa S e 2 unità di risorsa T e viene venduta al prezzo di 100$; un'unità di bene B richiede 3 ore di lavorazione, 5 unità di risorsa S e 1 unità di risorsa T e viene venduta al prezzo di 130$; un'unità di bene C richiede 2 ore di lavorazione, 2 unità di risorsa S e 5 unità di risorsa T e viene venduta al prezzo di 110$.
Giornalmente l'industria può rifornirsi di al più 100 unità di risorsa S al prezzo unitario di 10$, mentre per la risorsa T può rifornirsi di al più 30 unità al prezzo unitario di 15$ e può produrla autonomamente al prezzo unitario di 10$ con 1 ora di lavorazione.
L'industria dispone di al più 80 ore di lavoro giornaliere al prezzo unitario di 4$.
Scrivere un modello lineare per determinare quanto produrre giornalmente di ciascun bene in modo da massimizzare i profitti.
TEMPO SUGGERITO: 20m

2) Risolvere il seguente problema dello zaino con l'algoritmo Branch and Bound utilizzando la strategia highest-first, senza le tecniche di accelerazione:

Valore	6	11	23	25
Peso	2	3	7	6

Peso massimo trasportabile: 14
TEMPO SUGGERITO: 15m

SOLUZIONE DELLA PROVA DEL 24/2/1995

1) Indicando le quantità da produrre di ciascun bene con $\mathbf{x}_A$, $\mathbf{x}_B$, $\mathbf{x}_C$ e la quantità di risorsa T prodotta autonomamente con $\mathbf{x}_T$ si hanno i vincoli:

$2\,\mathbf{x}_A + 3\,\mathbf{x}_B + 2\,\mathbf{x}_C + \mathbf{x}_T \le 80$	le ore richieste per le lavorazioni non devono superare le ore disponibili
$3\,\mathbf{x}_A + 5\,\mathbf{x}_B + 2\,\mathbf{x}_C \le 100$	la risorsa S utilizzata non deve superare la disponibilità
$2\,\mathbf{x}_A + \mathbf{x}_B + 5\,\mathbf{x}_C \le 30 + \mathbf{x}_T$	la risorsa T utilizzata non deve superare la disponibilità
$\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B, \mathbf{x}_C, \mathbf{x}_T \ge 0$	le quantità da produrre di ciascun bene e la quantità di risorsa T prodotta devono essere non negative

e la funzione obiettivo:

max $\mathbf{z}$ = R - CL - CS - CT massimizzare la differenza tra i ricavi e i costi

dove $R = 100\,\mathbf{x}_A + 130\,\mathbf{x}_B + 110\,\mathbf{x}_C$	ricavi
$CL = 4\,(2\,\mathbf{x}_A + 3\,\mathbf{x}_B + 2\,\mathbf{x}_C + \mathbf{x}_T)$	costo delle lavorazioni
$CS = 10\,(3\,\mathbf{x}_A + 5\,\mathbf{x}_B + 2\,\mathbf{x}_C)$	costo della risorsa S
$CT = 15\,(2\,\mathbf{x}_A + \mathbf{x}_B + 5\,\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_T) + 10\,\mathbf{x}_T$	costo della risorsa T

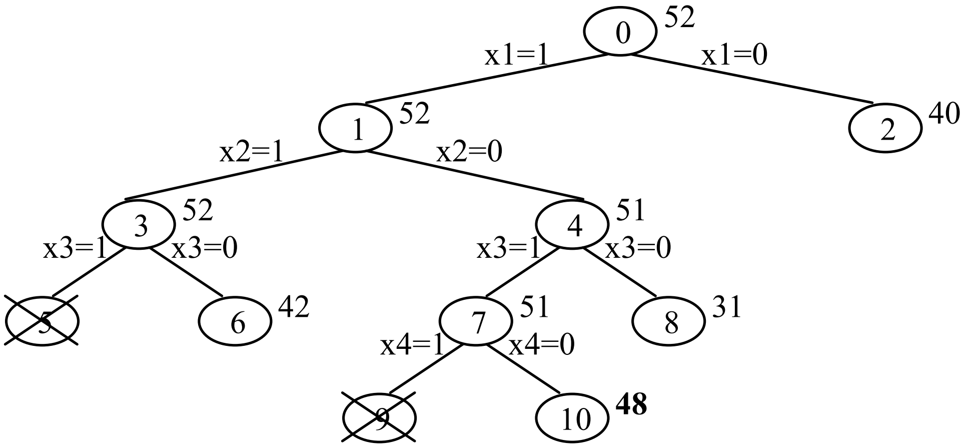
Ricapitolando si ha:

$$
\begin{array}{ll}
\max & \mathbf{z} = 32\,\mathbf{x}_A + 53\,\mathbf{x}_B + 7\,\mathbf{x}_C + \mathbf{x}_T \\
\text{s.t.} & 2\,\mathbf{x}_A + 3\,\mathbf{x}_B + 2\,\mathbf{x}_C + \mathbf{x}_T \le 80 \\
& 3\,\mathbf{x}_A + 5\,\mathbf{x}_B + 2\,\mathbf{x}_C \le 100 \\
& 2\,\mathbf{x}_A + \mathbf{x}_B + 5\,\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_T \le 30 \\
& \mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B, \mathbf{x}_C, \mathbf{x}_T \ge 0
\end{array}
$$

2) Riordinando gli oggetti per rapporti valore/peso decrescenti si ha:

Valore	25	11	23	6
Peso	6	3	7	2
Variabile associata	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$
Peso massimo trasportabile	14			

Utilizzando l'algoritmo richiesto si ha il seguente albero decisionale:



La soluzione ottimale è $\mathbf{x}^* = (1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{z}^* = 48$.

PROVA SCRITTA DEL 24/4/1995

1) Sia dato il seguente programma lineare **P**:

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{z} = \mathbf{x}_1 - 2\,\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 \\ \text{s.t.} & 2\,\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \le 2 \\ & 3\,\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 \ge 1 \\ & \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \ge 0 \end{array}$$

a - Risolvere **P** con l'algoritmo del simplesso scegliendo la variabile entrante più in alto e la variabile uscente più a sinistra.

b - Scrivere il problema **P*** duale di **P** e determinare una soluzione ottimale.

TEMPO SUGGERITO: 30m

2) Rilassare per eliminazione dei vincoli (*) il seguente PLI:

$$\begin{array}{lll} \min & \mathbf{z} = 3\,\mathbf{x}_1 + 2\,\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 - 2\,\mathbf{x}_4 & \\ \text{s.t.} & 2\,\mathbf{x}_1 - 3\,\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + 2\,\mathbf{x}_4 \ge 2 & (*) \\ & \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 - 2\,\mathbf{x}_4 \le 3 & (*) \\ & \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 \in \{\, 0 - 1 \,\} & \end{array}$$

Risolvere per ispezione il rilassamento, riportando le considerazioni fatte e dire se la soluzione ottenuta è ottimale per il problema dato e perchè.

TEMPO SUGGERITO: 10m

3) Un viaggiatore si presenta alla stazione di Torino (TO) alle ore 8.00 per recarsi a Bologna (BO).

L'orario ferroviario offre i seguenti treni:

```
TO  7.30    TO  8.30    TO 11.00    MI 11.00    GE 11.00    AL 12.00
AL  8.30    MI 10.30    AL 12.00    BO 15.00    BO 15.00    MI 13.30
GE  9.30    BO 16.00
```

Scrivere un opportuno modello per determinare se è possibile giungere a Bologna entro le 15.30 e determinare l'eventuale itinerario utilizzando un opportuno algoritmo.

SOLUZIONE DELLA PROVA DEL 24/4/1995

1a) Passando alla forma canonica si ha:

$$\begin{array}{ll} -\max & -\mathbf{z} = -\,\mathbf{x}_1 + 2\,\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 \\ \text{s.t.} & 2\,\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \le 2 \\ & -3\,\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 \le -1 \\ & \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \ge 0 \end{array}$$

Applicando l'algoritmo richiesto si ha:

	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	
$\mathbf{u}_1$	-2 *	-1	0	2
$\mathbf{u}_2$	3	1	1	-1
-z	-1	2	-1	0

	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	
$\mathbf{x}_1$	-1/2	-1/2	0	1
$\mathbf{u}_2$	-3/2 *	-1/2	1	2
-z	1/2	5/2	-1	-1

	$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	
$\mathbf{x}_1$	1/3	-1/3 *	-1/3	1/3
$\mathbf{u}_1$	-2/3	-1/3	2/3	4/3
$\mathbf{-z}$	-1/3	7/3	-2/3	-1/3

	$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_3$	
$\mathbf{x}_2$	1	-3	-1	1
$\mathbf{u}_1$	-1 *	1	1	1
$\mathbf{-z}$	2	-7	-3	2

	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_3$	
$\mathbf{x}_2$	-1	-2	0	2
$\mathbf{u}_2$	-1	1	1	1
$\mathbf{-z}$	-2	-5	-1	4

La tabella è ottimale e la soluzione ottimale è $\mathbf{x}^* = (0, 2, 0)$, $\mathbf{z}^* = -4$.

1b) Il duale del programma **P** in forma canonica è:

$$- \min - \mathbf{w} = 2\,\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$$

s.t.
$$2\,\mathbf{u}_1 - 3\,\mathbf{u}_2 \geq -1$$
$$\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \geq 2$$
$$- \mathbf{u}_2 \geq -1$$
$$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \geq 0$$

Dalla tabella ottimale precedente si ricava la soluzione ottimale $\mathbf{u}^* = (2, 0)$, $\mathbf{w}^* = -4$.

2) Il rilassamento richiesto è:

$$\min \quad \mathbf{z}_E = 3\,\mathbf{x}_1 + 2\,\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 - 2\,\mathbf{x}_4$$
$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 \in \{ 0 - 1 \}$$

La soluzione per ispezione è $\mathbf{x}_E = (0, 0, 1, 1)$ poichè i coefficienti di $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ sono positivi e quelli di $\mathbf{x}_3$, $\mathbf{x}_4$ sono negativi e risulta ottimale per il problema dato perchè è ammissibile, essendo $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}_E) = 1 \geq 0$ e $\mathbf{u}_2(\mathbf{x}_E) = 5 \geq 0$ e $\mathbf{z} = \mathbf{z}_E$.

3) Costruendo una rete spazio-temporale in cui ogni nodo rappresenta una città in un diverso istante e ogni arco rappresenta una attesa in una data città oppure uno spostamento in treno da una città ad un'altra, si tratta di determinare se esiste un cammino orientato tra il nodo Torino-8.00 e Bologna-15.30.

Per determinare se esiste un cammino orientato tra il nodo Torino-8.00 e Bologna-15.30 si può utilizzare un algoritmo di ricerca in ampiezza che genera la seguente lista:

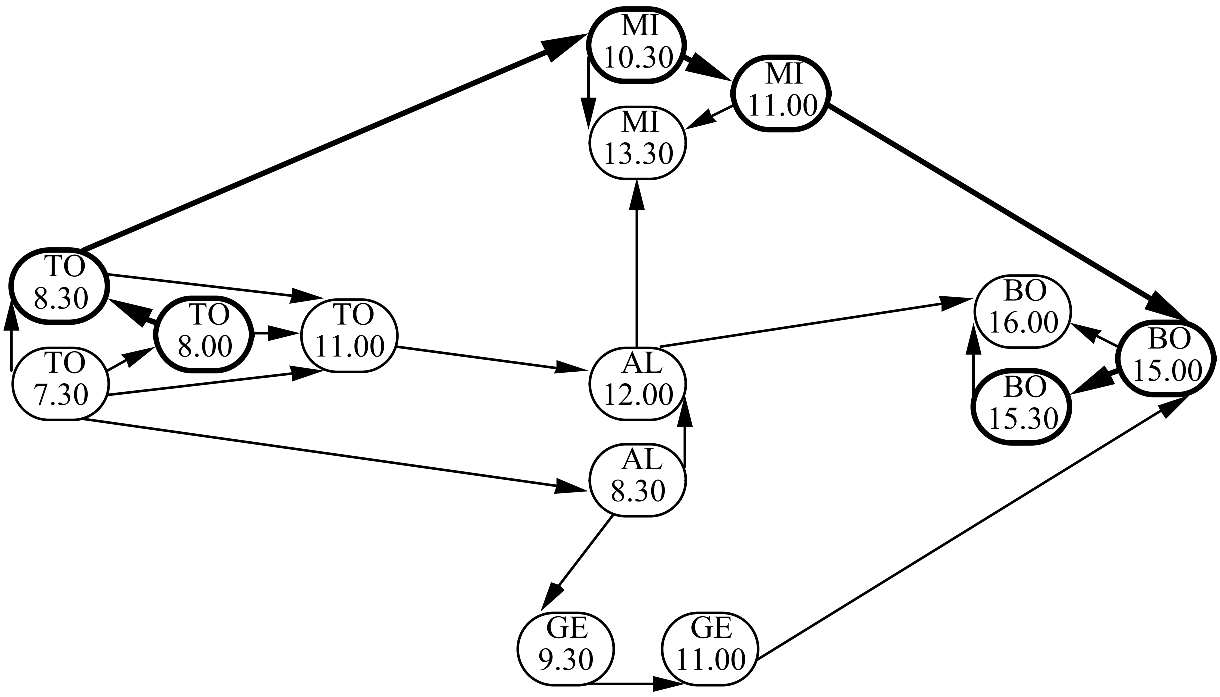
TO-8.00, TO-8.30, TO-11.00, MI-10.30, AL-12.00, MI-11.00, MI-13.30, BO-16.00, BO-15.00, BO-15.30

Poichè il nodo Bologna-15.30 è fortemente accessibile dal nodo Torino-8.00 è possibile giungere a Bologna entro le 15.30. Il cammino orientato è quello evidenziato in grassetto.

L'itinerario corrispondente è:

Prendere il treno Torino - Milano delle ore 8.30 che arriva alle ore 10.30 e successivamente il treno Milano - Bologna delle ore 11.00 che arriva alle ore 15.00.

La rete richiesta è la seguente:



PROVA SCRITTA DEL 14/6/1995

1) Siano dati i seguenti problemi lineari **P1** e **P2**:

P1:
$$\begin{aligned} \min\ & 5\,\mathbf{x}_1 - 3\,\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 \\ \text{s.t. } & 2\,\mathbf{x}_1 - 3\,\mathbf{x}_2 \geq 5 \\ & \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + 2\,\mathbf{x}_3 \geq 2 \\ & \mathbf{x}_1 + 3\,\mathbf{x}_2 - 3\,\mathbf{x}_3 \leq 4 \\ & \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \geq 0 \end{aligned}$$

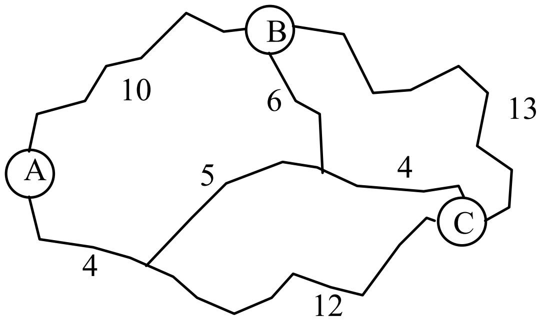
P2:
$$\begin{aligned} \max\ & 5\,\mathbf{x}_1 + 2\,\mathbf{x}_2 - 4\,\mathbf{x}_3 \\ \text{s.t. } & 2\,\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 \leq 5 \\ & 3\,\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + 3\,\mathbf{x}_3 \geq 3 \\ & 2\,\mathbf{x}_2 + 3\,\mathbf{x}_3 \leq 1 \\ & -4\,\mathbf{x}_2 - 6\,\mathbf{x}_3 \leq -2 \\ & \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \geq 0 \end{aligned}$$

a) Si può affermare che **P1** e **P2** sono tra loro duali? (giustificare la risposta)

b) Il punto **A** (3, 1/3, 0) è un vertice della regione ammissibile di **P1**? (giustificare la risposta)

TEMPO SUGGERITO: 20m

2) Un consorzio intercomunale vuole istituire un servizio di protezione civile e vuole determinare in quale dei comuni del consorzio porre la sede, in modo da fornire la massima rapidità di intervento, cioè in modo che tutti i comuni abbiano distanza minima dalla sede del servizio.
Rappresentare il problema con un opportuno modello e descrivere una procedura algoritmica per determinare la soluzione.
Utilizzando la procedura precedente risolvere il seguente esempio:



TEMPO SUGGERITO 20m

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 14/6/1995

1a) Il terzo e il quarto vincolo del problema **P2** possono essere riscritti nella forma:

$$2\,\mathbf{x}_2 + 3\,\mathbf{x}_3 = 1$$

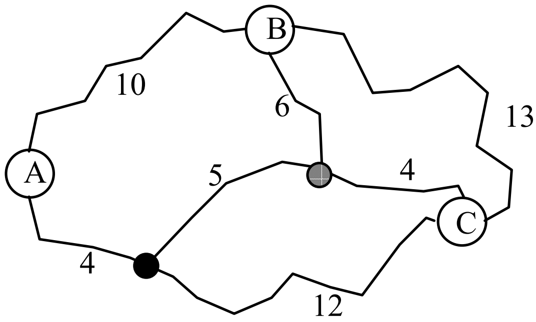
Cambiando di segno al secondo vincolo del problema **P2** e scrivendo il duale del problema così ottenuto si ha:

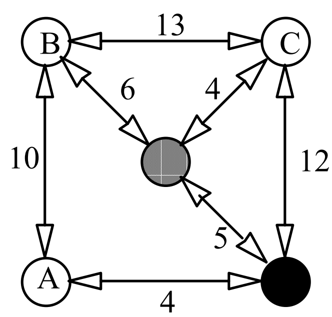
$$\begin{array}{ll} \min & 5\,\mathbf{u}_1 - 3\,\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 \\ \text{s.t.} & 2\,\mathbf{u}_1 - 3\,\mathbf{u}_2 \geq 5 \\ & \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + 2\,\mathbf{u}_3 \geq 2 \\ & -\,\mathbf{u}_1 - 3\,\mathbf{u}_2 + 3\,\mathbf{u}_3 \geq -\,4 \\ & \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \geq 0 \end{array}$$

Cambiando di segno al terzo vincolo del problema ottenuto si ritrova il problema **P1**.
Si può pertanto concludere che **P2** è equivalente al duale del problema **P1**.

1b) Considerando il problema **P1** in forma canonica il punto **A** è un vertice, in quanto appartiene ai quattro iperpiani linearmente indipendenti $\mathbf{x}_3^+ = 0$, $\mathbf{x}_3^- = 0$, $\mathbf{u}_1 = 0$, $\mathbf{u}_3 = 0$ e non lo è considerando il problema nella forma data, poichè appartiene ai due iperpiani $\mathbf{u}_1 = 0$, $\mathbf{u}_3 = 0$.

2) Poichè le informazioni sulle distanze non sono date relativamente ai comuni è possibile calcolarle tramite un problema di cammino minimo su un grafo in cui ai comuni e agli incroci sono associati i nodi e ai tratti di strada sono associati due archi (uno per ciascuna direzione) come nella figura seguente relativa all'esempio proposto.





La soluzione è data dal comune per cui è minima la distanza massima dagli altri comuni (si osservi che la soluzione non è necessariamente un nodo del centro del grafo).
Applicando la procedura al caso proposto si ottiene:

Comune A	A	B	C	●	⊕	
	0	10	-	**4**	-	min = ●
	0	10	16	**4**	**9**	min = ⊕
	0	**10**	13	**4**	**9**	min = B
	0	**10**	**13**	**4**	**9**	min = C

max { d(A, B), d(A, C) } = 13

Comune B	A	B	C	●	◍	
	10	**0**	13	-	**6**	min = ◍
	10	**0**	10	11	**6**	min = A
	10	**0**	**10**	11	**6**	min = C

max { d(B, A), d(B, C) } = 10

Comune C	A	B	C	●	◍	
	-	13	**0**	12	**4**	min = ◍
	-	**10**	**0**	**9**	**4**	min = ●
	13	**10**	**0**	**9**	**4**	min = B
	13	**10**	**0**	**9**	**4**	min = A

max { d(C, A), d(C, B) } = 13

Pertanto la sede del servizio va collocata nel comune B.

PROVA SCRITTA DEL 3/7/1995

1) Si consideri il seguente problema dello zaino:

Valore	22	27	27	56	55
Peso	4	6	7	10	12

Peso massimo trasportabile: 23

La soluzione fornita dall'algoritmo greedy costituisce un'approssimazione con un errore inferiore al 10% ?

TEMPO SUGGERITO: 30m

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 3/7/1995

1) Riordinando gli oggetti per rapporti valore/peso decrescenti si ha:

Valore	56	22	55	27	27
Peso	10	4	12	6	7
Variabile associata	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	$\mathbf{x}_5$

Peso massimo trasportabile: 23

L'algoritmo greedy fornisce la soluzione approssimata $x_G = (1, 1, 0, 1, 0)$, $z_G = 105$.

L'algoritmo Branch and Bound, utilizzando la strategia highest-first e le tecniche di accelerazione, fornisce le seguenti limitazioni:

$$L(0) = \left| \, 56 + 22 + \tfrac{9}{12}\,55 \, \right| = 119 \qquad \frac{z_G}{z^*} \geq \frac{z_G}{L(0)} = \frac{105}{119} \approx 0{,}882 \Rightarrow \text{errore} > 10\%$$

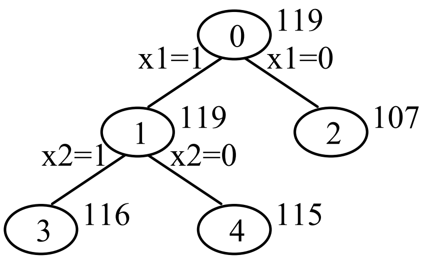
$$L(1) = \left| \, 56 + 22 + \tfrac{9}{12}\,55 \, \right| = 119$$

$$L(2) = \left| \, 22 + 55 + 27 + \tfrac{1}{7}\,27 \, \right| = 107 \qquad \frac{z_G}{z^*} \geq \frac{z_G}{L(1)} = \frac{105}{119} \approx 0{,}882 \Rightarrow \text{errore} > 10\%$$

$$L(3) = \left| \, 56 + 22 + 27 + \tfrac{3}{7}\,27 \, \right| = 116$$

$$L(4) = \left| \, 56 + 55 + \tfrac{1}{6}\,27 \, \right| = 115 \qquad \frac{z_G}{z^*} \geq \frac{z_G}{L(3)} = \frac{105}{116} \approx 0{,}905 \Rightarrow \text{errore} < 10\%$$

Lo schema è rappresentato dal seguente albero decisionale:



PROVA SCRITTA DEL 28/9/1995

1) Sia dato un problema lineare di cui si sa che i punti **A** (2, 3, 0, 1) e **B** (8, -3, -3, 4) sono ottimali. Dire se i punti **C** (4, 1, -1, 2) e **D** (-4, 9, 3, -2) sono ottimali.
TEMPO SUGGERITO: 30m

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 28/9/1995

1) Le uniche informazioni disponibili permettono di concludere che il segmento **AB** è contenuto nella regione ottimale. Si può vedere se **C** e **D** appartengono al segmento **AB**. Usando il procedimento del cardine si ha:

	e_1	e_2	e_3	e_4
A	2 *	3	0	1
B	8	-3	-3	4
C	4	1	-1	2
D	-4	9	3	-2

	A	e_2	e_3	e_4
e_1	1/2	-3/2	0	-1/2
B	4	-15 *	-3	0
C	2	-5	-1	0
D	-2	15	3	0

	A	**B**	e_3	e_4
e_1	1/10	1/10	3/10	-1/2
e_2	4/15	-1/15	-1/5	0
C	2/3	1/3	0	0
D	2	-1	0	0

Dall'ultima tabella si ricava che per il punto **C** vale la relazione:

$$\mathbf{C} = \frac{2}{3}\ \mathbf{A} + \frac{1}{3}\ \mathbf{B}$$

pertanto appartiene al segmento **AB** e quindi è ottimale, mentre per il punto **D** si ha:

$$\mathbf{D} = 2\ \mathbf{A} - \mathbf{B}$$

pertanto appartiene alla retta **AB** ma nulla si può dire sulla sua ottimalità.

PROVA SCRITTA DEL 10/1/1996

1) Sia dato il seguente PLI:

$$\begin{array}{ll} \max & 2\,\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \\ \text{s.t.} & -\,\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \le 2 \\ & -\,3\,\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \le -1 \\ & 3\,\mathbf{x}_1 + 2\,\mathbf{x}_2 \le 2 \\ & \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \ge 0 \text{ e interi} \end{array}$$

a - Risolverlo con l'algoritmo di Gomory, scegliendo la variabile uscente più a sinistra e la variabile entrante più in alto e generando i tagli utilizzando la riga più in alto.

b - Disegnare accuratamente la regione ammissibile, i vincoli, i tagli di Gomory e lo spostamento della soluzione corrente.

TEMPO SUGGERITO: 35m

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 10/1/1996

1a) Applicando l'algoritmo richiesto si ha:

	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	
$\mathbf{u}_1$	1	-1	2
$\mathbf{u}_2$	3 *	1	-1
$\mathbf{u}_3$	-3	-2	2
$\mathbf{z}$	2	1	0

	$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{x}_2$	
$\mathbf{u}_1$	1/3	-4/3	7/3
$\mathbf{x}_1$	1/3	-1/3	1/3
$\mathbf{u}_3$	-1 *	-1	1
$\mathbf{z}$	2/3	1/3	2/3

	$\mathbf{u}_3$	$\mathbf{x}_2$	
$\mathbf{u}_1$	-1/3	-5/3	8/3
$\mathbf{x}_1$	-1/3	-2/3	2/3
$\mathbf{u}_2$	-1	-1	1
$\mathbf{z}$	-2/3	-1/3	4/3

La tabella è ottimale ma la soluzione $\mathbf{x} = \left(\frac{2}{3}, 0\right)$, $\mathbf{z} = \frac{4}{3}$ non è intera; dalla riga di $\mathbf{u}_1$ si genera il vincolo $\mathbf{u}_4$:

	$\mathbf{u}_3$	$\mathbf{x}_2$	
$\mathbf{u}_1$	-1/3	-5/3	8/3
$\mathbf{x}_1$	-1/3	-2/3	2/3
$\mathbf{u}_2$	-1	-1	1
$\mathbf{u}_4$	1/3	2/3 *	-2/3
$\mathbf{z}$	-2/3	-1/3	4/3

	$\mathbf{u}_3$	$\mathbf{u}_4$	
$\mathbf{u}_1$	1/2	-5/2	1
$\mathbf{x}_1$	0	-1	0
$\mathbf{u}_2$	-1/2	-3/2	0
$\mathbf{x}_2$	-1/2	3/2	1
$\mathbf{z}$	-1/2	-1/2	1

La tabella è ottimale e la soluzione **x*** = (0, 1), **z*** = 1 è intera.

1b) Dalla relazione $\mathbf{u}_4 = \frac{1}{3}\ \mathbf{u}_3 - \frac{2}{3}\ \mathbf{x}_2$ si ricava $\mathbf{x}_1 \leq 0$ e la rappresentazione è la seguente: