PROVE D'ESAME 1995/96

PROVA PARZIALE DEL 26/10/1995

1) Sia dato il seguente programma lineare **P**:

$$\begin{array}{ll} \max & 2\,\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \\ \text{s.t.} & 3\,\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \le 2 \\ & -\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = 1 \\ & \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \ge 0 \end{array}$$

a - Il punto **A** = (0, 1) è un vertice ammissibile per il problema **P**? (giustificare la risposta)
b - Risolvere **P** con l'algoritmo del simplesso.
c - Scrivere le equazioni del problema **P*** duale di **P** e determinarne la soluzione ottimale.
TEMPO SUGGERITO: 30m

SOLUZIONE DELLA PROVA PARZIALE DEL 26/10/1995

1a) Il punto **A** è ammissibile:

$0 \ge 0$	OK
$1 \ge 0$	OK
$-1 \le 2$	OK
$1 = 1$	OK

e appartiene agli iperpiani $\mathbf{x}_1 = 0$ e $-\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = 1$ che sono linearmente indipendenti.

1b) Passando al problema associato a **P** si ottiene:

	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	
u	-3	1	2
v	1	$\boxed{-1}$	1
z	2	-1	0
t	-1	1	-1

Facendo cardine sull'elemento di posto 2, 2 si ottiene:

	$\mathbf{x}_1$	**v**	
u	$\boxed{-2}$	-1	3
$\mathbf{x}_2$	1	-1	1
z	1	1	-1
t	0	-1	0

La tabella è ottimale per **t** e inoltre **t** = 0, quindi eliminando la riga di **t** e facendo cardine sull'elemento di posto 1, 1 si ottiene:

	u	**v**	
$\mathbf{x}_1$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
$\mathbf{x}_2$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$
z	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

La tabella è ottimale per **P** e la soluzione è:

$$\mathbf{x}^* = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) ; \mathbf{z}^* = \frac{1}{2}$$

1c) Il duale richiesto è:

$$\begin{array}{ll} \min & 2\,\mathbf{u} + \mathbf{v} \\ \text{s.t.} & 3\,\mathbf{u} - \mathbf{v} \geq 2 \\ & -\,\mathbf{u} + \mathbf{v} \geq -1 \\ & \mathbf{u} \geq 0 \text{ ; } \mathbf{v} \text{ libera} \end{array}$$

Dalla tabella ottimale del problema **P** si ricava:

$$\mathbf{u}^* = \frac{1}{2} \text{ ; } \mathbf{v}^* = -\frac{1}{2} \text{ ; } \mathbf{w}^* = \frac{1}{2}$$

PROVA PARZIALE DEL 22/11/1995

1) Con riferimento al problema dello zaino definire analiticamente i seguenti vincoli, giustificando la risposta:
   a - Si porta l'oggetto **A** solo se non si porta l'oggetto **B**.
   b - Si porta l'oggetto **A** se e solo se non si porta l'oggetto **B**.
   TEMPO SUGGERITO: 10m

2) Sia dato il PLI **P** a variabili 0-1:

$$\begin{array}{ll} \max & \mathbf{z} = 5\,\mathbf{x}_1 + 2\,\mathbf{x}_2 + 3\,\mathbf{x}_3 + 5\,\mathbf{x}_4 \\ \text{s.t.} & \mathbf{x}_1 + 2\,\mathbf{x}_2 + 2\,\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4 \leq 1 \\ & 2\,\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 + 2\,\mathbf{x}_4 \leq 4 \\ & \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

   a - Scrivere il problema $\mathbf{P}_L$ ottenuto col rilassamento lagrangiano dei vincoli di disuguaglianza con moltiplicatori $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, risolvere il problema $\mathbf{P}_L$ per ispezione e dire se la soluzione ottenuta è ottimale per **P** e perchè.
   b - Scrivere il problema $\mathbf{P}_S$ ottenuto col rilassamento surrogato dei vincoli di disuguaglianza con moltiplicatori $\pi_1 = 2$, $\pi_2 = 1$, risolvere il problema $\mathbf{P}_S$ come problema dello zaino e dire se la soluzione ottenuta è ottimale per **P** e perchè.
   TEMPO SUGGERITO: 30m

SOLUZIONE DELLA PROVA PARZIALE DEL 22/11/1995

1a) Gli oggetti **A** e **B** non possono essere portati entrambi, quindi una sola delle variabili può essere non nulla:

$$\mathbf{x}_A + \mathbf{x}_B \leq 1.$$

1b) Gli oggetti **A** e **B** sono alternativi, quindi una e una sola delle variabili deve essere non nulla:

$$\mathbf{x}_A + \mathbf{x}_B = 1.$$

2a) Il problema $\mathbf{P}_L$ è:

$$\begin{array}{ll} \max & \mathbf{z}_L = \mathbf{x}_1 - 3\,\mathbf{x}_2 + 5\,\mathbf{x}_4 + 6 \\ \text{s.t.} & \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

Ponendo uguali a 1 le variabili aventi coefficiente positivo o nullo nella funzione obiettivo e uguali a 0 quelle aventi coefficiente negativo si ha:

$$\mathbf{x}^*_L = (1, 0, 1, 1),\ \mathbf{z}_L(\mathbf{x}^*_L) = 12$$

La soluzione trovata non è ottimale per **P** in quanto non ammissibile:

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{x}^*_L) = -1 - 0 - 2 + 1 + 1 = -1 < 0$$

$$\mathbf{u}_2(\mathbf{x}^*_L) = -2 - 0 + 1 - 2 + 4 = 1 \geq 0$$

Ponendo uguali a 1 le variabili aventi coefficiente positivo nella funzione obiettivo e uguali a 0 quelle aventi coefficiente negativo o nullo si ha:

$\mathbf{x}^*_L = (1, 0, 0, 1)$, $\mathbf{z}_L(\mathbf{x}^*_L) = 12$

La soluzione trovata non è ottimale per **P**; infatti è ammissibile:

$\mathbf{u}_1(\mathbf{x}^*_L) = -1 + 0 + 0 + 1 + 1 = 1 \geq 0$

$\mathbf{u}_2(\mathbf{x}^*_L) = -2 + 0 + 0 - 2 + 4 = 0 \geq 0$

ma essendo $\mathbf{z}(\mathbf{x}^*_L) = 10$ si ha:

$\mathbf{z}(\mathbf{x}^*_L) \neq \mathbf{z}_L(\mathbf{x}^*_L)$

2b) Il problema $\mathbf{P}_S$ è:

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{z}_S = 5\,\mathbf{x}_1 + 2\,\mathbf{x}_2 + 3\,\mathbf{x}_3 + 5\,\mathbf{x}_4 \\ \text{s.t.} \quad & 4\,\mathbf{x}_1 + 5\,\mathbf{x}_2 + 3\,\mathbf{x}_3 \leq 6 \\ & \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Esso equivale al seguente problema dello zaino:

Oggetto	$\mathbf{x}_4$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_2$
Valore	5	5	3	2
Peso	0	4	3	5

Peso massimo trasportabile = 6

Con le notazioni usuali e utilizzando le tecniche di accelerazione, si ha:

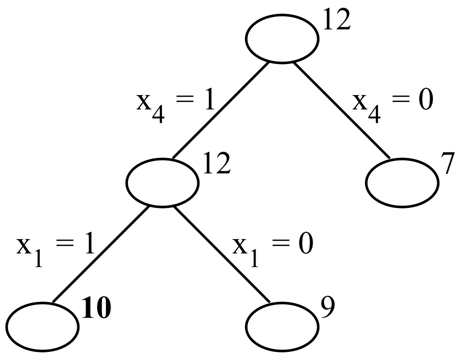
(-) $L = \left\lfloor 5 + 5 + \frac{2}{3}3 \right\rfloor = 12$ separato

(1) $L = \left\lfloor 5 + 5 + \frac{2}{3}3 \right\rfloor = 12$ separato

(0) $L = \left\lfloor 5 + \frac{2}{3}3 \right\rfloor = 7$ eliminato per E2

(11) $L = \lfloor 5 + 5 \rfloor = 10$ ammissibile

(10) $L = \left\lfloor 5 + 3 + \frac{3}{5}2 \right\rfloor = 9$ eliminato per E2



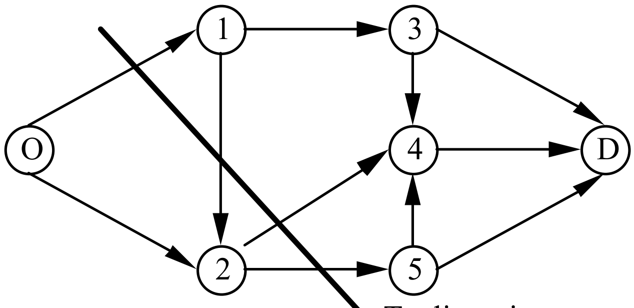
La soluzione di (11) è ammissibile e ha limitazione massima per cui si eliminano i sottoproblemi (0) e (10) e la soluzione ottimale è:

$\mathbf{x}^*_S = (1, 0, 0, 1)$, $\mathbf{z}_S(\mathbf{x}^*_S) = 10$

La soluzione trovata è ottimale per **P** poichè è ammissibile (vedi 2a) e si ha $\mathbf{z}_S = \mathbf{z}$.

PROVA PARZIALE DEL 24/1/1996

2) Sia dato un problema di traffico modellizzato tramite un problema di flusso massimo da O a D, che risolto fornisce la seguente configurazione finale:



Taglio ottimo

Disponendo di finanziamenti per allargare una sola strada, quale conviene scegliere per aumentare il flusso da O a D e perchè.
TEMPO SUGGERITO: 10m

SOLUZIONE DELLA PROVA PARZIALE DEL 24/1/1996

2) E' possibile escludere le strade corrispondenti agli archi che non fanno parte del taglio ottimo, ma non disponendo di indicazioni sul flusso massimo corrente e sulle capacità massime degli archi nulla si può dire sulle altre strade, in quanto la strada scelta potrebbe corrispondere ad un arco del taglio ottimo corrente non facente parte di un ulteriore taglio avente la stessa capacità e che diverrebbe il nuovo taglio ottimo.

PROVA SCRITTA DEL 5/2/1996

1) Sia dato il PLI **P** a variabili 0-1:

$$\begin{aligned}
\max \quad & z = 3\,\mathbf{x}_1 + 2\,\mathbf{x}_2 + 4\,\mathbf{x}_3 + 5\,\mathbf{x}_4 \\
\text{s.t.} \quad & \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4 = 2 \\
& \mathbf{x}_1 + 2\,\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + 3\,\mathbf{x}_4 \le 3 \\
& 2\,\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + 3\,\mathbf{x}_3 + 2\,\mathbf{x}_4 \le 4 \\
& \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 \in \{0, 1\}
\end{aligned}$$

a - Scrivere il problema $\mathbf{P}_E$ ottenuto eliminando i vincoli di disuguaglianza, risolvere il problema $\mathbf{P}_E$ per ispezione e dire se la soluzione ottenuta è ottimale per **P** e perchè.

b - Scrivere il problema $\mathbf{P}_S$ ottenuto col rilassamento surrogato dei vincoli di disuguaglianza con moltiplicatori unitari, risolvere il problema $\mathbf{P}_S$ con semplici considerazioni e dire se la soluzione ottenuta è ottimale per **P** e perchè.

c - Scrivere il problema $\mathbf{P}_L$ ottenuto col rilassamento lagrangiano dei vincoli di disuguaglianza con moltiplicatori $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, risolvere il problema $\mathbf{P}_L$ per ispezione e dire se la soluzione ottenuta è ottimale per **P** e perchè.

TEMPO SUGGERITO: 20m

2) Sia dato il grafo **G** avente la seguente rappresentazione forward star:

$\mathbf{u} = (3, 1, 4, 4, 5, 6, 4, 5, 6, 8, 6)$

$\mathbf{p} = (1, 2, 4, 5, 7, 8, 8, 11, 12)$

Verificare che esiste uno spanning tree di **G**, determinarne uno e darne la rappresentazione forward star, analizzando i nodi e gli archi in ordine crescente di indice.
TEMPO SUGGERITO 10m

SOLUZIONE DELLA PROVA PARZIALE DEL 5/2/1996

1a) Il problema $\mathbf{P}_E$ è:

$$\begin{aligned} \max\quad & z_E = 3\,\mathbf{x}_1 + 2\,\mathbf{x}_2 + 4\,\mathbf{x}_3 + 5\,\mathbf{x}_4 \\ \text{s.t.}\quad & \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4 = 2 \\ & \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Ponendo uguali a 1 le due variabili aventi maggior valore nella funzione obiettivo si ha:

$x^*_E = (0, 0, 1, 1)$, $z^*_E = 9$

La soluzione trovata non è ottimale per **P** in quanto non ammissibile:

$\mathbf{u}_1(x^*_E) = - 0 - 0 - 1 - 3 + 3 = - 1 < 0$

$\mathbf{u}_2(x^*_E) = - 0 - 0 - 3 - 2 + 4 = - 1 < 0$

1b) Il problema $\mathbf{P}_S$ è:

$$\begin{aligned} \max\quad & z_S = 3\,\mathbf{x}_1 + 2\,\mathbf{x}_2 + 4\,\mathbf{x}_3 + 5\,\mathbf{x}_4 \\ \text{s.t.}\quad & \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4 = 2 \\ & 3\,\mathbf{x}_1 + 3\,\mathbf{x}_2 + 4\,\mathbf{x}_3 + 5\,\mathbf{x}_4 \leq 7 \\ & \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Considerando le variabili aventi maggior valore nella funzione obiettivo si osserva che ponendo $\mathbf{x}_4 = 1$ non si possono soddisfare i vincoli e quindi si ha:

$x^*_S = (1, 0, 1, 0)$, $z^*_S = 7$

La soluzione trovata non è ottimale per **P** in quanto non ammissibile:

$\mathbf{u}_1(x^*_S) = - 1 - 0 - 1 - 0 + 3 = 1 \geq 0$

$\mathbf{u}_2(x^*_S) = - 2 - 0 - 3 - 0 + 4 = - 1 < 0$

1c) Il problema $\mathbf{P}_L$ è:

$$\begin{aligned} \max\quad & z_L = - 6\,\mathbf{x}_1 - 7\,\mathbf{x}_2 - 8\,\mathbf{x}_3 - 10\,\mathbf{x}_4 + 21 \\ \text{s.t.}\quad & \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4 = 2 \\ & \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Risolvendo per ispezione si ha:

$x^*_L = (1, 1, 0, 0)$, $z^*_L = 8$

Non si può dire se la soluzione trovata è ottimale per **P** in quanto:

$\mathbf{u}_1(x^*_L) = - 1 - 2 - 0 - 0 + 3 = 0 \geq 0$

$\mathbf{u}_2(x^*_L) = - 2 - 1 - 0 - 0 + 4 = 1 \geq 0$

$z(x^*_L) = 3 + 2 + 0 + 0 = 5 \neq z^*_L$

2) Il grafo **G** è connesso per cui ammette uno spanning tree.

Visitamdo il grafo in ampiezza nell'ordine indicato, si ottiene il seguente spanning tree:

$\mathbf{u} = (3, 1, 4, 5, 6, 5, 6)$

$\mathbf{p} = (1, 2, 4, 4, 6, 6, 6, 7, 8)$

PROVA SCRITTA DEL 22/2/1996

1) Sia dato il PLI **P** a variabili 0-1:

$$\begin{aligned} \max\quad & z = 6\,\mathbf{x}_1 + 2\,\mathbf{x}_2 + 4\,\mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4 \\ \text{s.t.}\quad & 2\,\mathbf{x}_1 + 3\,\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + 2\,\mathbf{x}_4 \leq 5 \\ & 3\,\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + 2\,\mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4 \leq 3 \\ & \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Scrivere il problema $\mathbf{P}_L$ ottenuto col rilassamento lagrangiano dei vincoli di disuguaglianza con moltiplicatori unitari, risolvere il problema $\mathbf{P}_L$ per ispezione e dire se la soluzione ottenuta è ottimale per **P** e perchè.
TEMPO SUGGERITO: 10m

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 22/2/1996

1) Il problema $\mathbf{P}_L$ è:

$$\max \quad z_L = \mathbf{x}_1 - 2\,\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 - 2\,\mathbf{x}_4 + 8$$
$$\text{s.t.} \quad \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 \in \{0, 1\}$$

la cui soluzione ottimale è:

$$x^*_L\ (1, 0, 1, 0)\ ;\ z^*_L = 10$$

Anche se $z(x^*_L) = z^*_L$ il punto x^*_L non è ottimale per **P** in quanto non è ammissibile:

$$\mathbf{u}_1(x^*_L) = -2 + 0 - 1 + 0 + 5 = 2 \geq 0$$
$$\mathbf{u}_2(x^*_L) = -3 + 0 - 2 + 0 + 3 = -2 < 0$$

PROVA SCRITTA DEL 12/4/1996

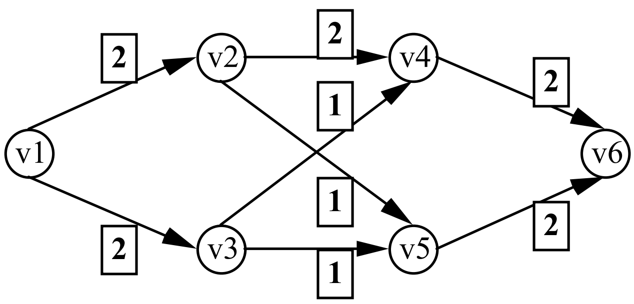
1) Sia dato il seguente programma lineare **P** in <u>dimensione infinita</u>, cioè avente <u>infinite variabili</u> e di cui si cerca <u>il sup e non il max di **z**</u>:

$$\sup \quad \mathbf{z} = \mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2 + 2\mathbf{x}_3 + 2\mathbf{x}_4 + 2\mathbf{x}_5 + \ldots$$
$$\text{s.t.} \quad \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4 + \mathbf{x}_5 + \ldots \leq 1$$
$$\mathbf{x}_2 + 1/2\mathbf{x}_3 + 1/3\mathbf{x}_4 + 1/4\mathbf{x}_5 + \ldots \leq 0$$
$$\mathbf{x}_i \geq 0 \quad \forall\, i$$

a - Determinare come è fatto l'insieme delle soluzioni ammissibili $\mathbf{S_a}$.
b - Determinare la soluzione ottimale ($\mathbf{x}^*$, $\mathbf{z}^*$).
c - Scrivere il problema duale $\mathbf{P}^*$ ($\mathbf{P}^*$ ha infiniti vincoli e si cerca <u>l'inf e non il min di **w**</u>).
d - Determinare come è fatto l'insieme delle soluzioni ammissibili $\mathbf{S_a}^*$ di $\mathbf{P}^*$.
e - Determinare la soluzione ottimale ($\mathbf{u}^*$, $\mathbf{w}^*$) di $\mathbf{P}^*$.
f - Commentare i risultati ottenuti.

N.B. I punti <u>a</u>, <u>b</u>, <u>d</u>, <u>e</u> vanno risolti con semplici considerazioni e non con gli algoritmi visti.
TEMPO SUGGERITO: 30m

2) Sia data la seguente rete:



a - Risolvere il problema di flusso massimo da $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_6$ con l'algoritmo di Ford e Fulkerson, analizzando i nodi e gli archi in ordine crescente di indici; ridisegnare la rete ad ogni iterazione, riportando le etichette di ogni nodo.
b - Determinare un taglio di capacità minima.
TEMPO SUGGERITO: 20m

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 12/4/1996

1a) Il secondo vincolo e i vincoli di non negatività impongono $\mathbf{x}_i = 0$, $i \geq 2$; a questo punto il primo vincolo e il vincolo di non negatività equivalgono a $0 \leq \mathbf{x}_1 \leq 1$; si ha quindi:

$$\mathbf{S_a} = \{\ 0 \leq \mathbf{x}_1 \leq 1;\ \mathbf{x}_i = 0,\ i \geq 2\ \}$$

1b) Osservando $\mathbf{z}$ ed $\mathbf{S_a}$ si ha:

$$\mathbf{x}^* = (1, 0, 0, 0, \ldots);\ \mathbf{z}^* = 1$$

1c) Il problema duale $\mathbf{P}^*$ può essere scritto nella forma:

$$\begin{array}{ll} \text{inf} & \mathbf{w} = \mathbf{u}_1 \\ \text{s.t.} & \mathbf{u}_1 \geq 1 \\ & \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \geq 2 \\ & \mathbf{u}_1 + 1/2\mathbf{u}_2 \geq 2 \\ & \mathbf{u}_1 + 1/3\mathbf{u}_2 \geq 2 \\ & \ldots \\ & \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \geq 0 \end{array}$$

1d) I vincoli dal secondo in avanti impongono la condizione $\mathbf{u}_1 \geq 2$ e il vincolo di non negatività impone la condizione $\mathbf{u}_2 \geq 0$; si ha quindi:

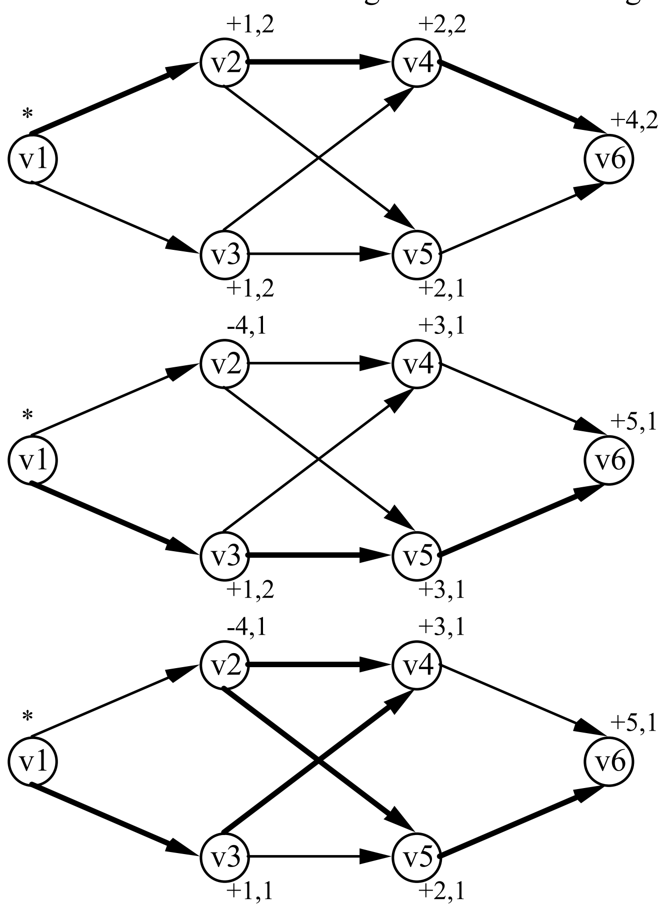
$$\mathbf{S_a}^* = \{\ \mathbf{u}_1 \geq 2;\ \mathbf{u}_2 \geq 0\ \}$$

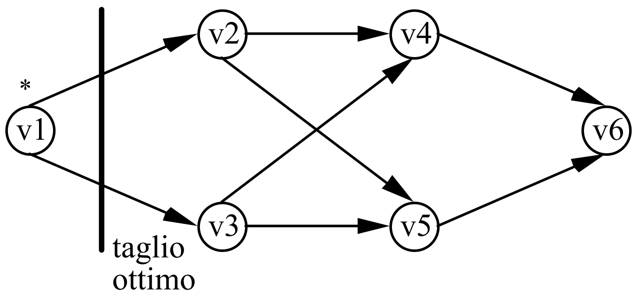
1e) Osservando $\mathbf{w}$ ed $\mathbf{S_a}^*$ si ha:

$$\mathbf{u}_1^* = 2,\ \mathbf{u}_2^* \text{ qualsiasi};\ \mathbf{w}^* = 2$$

1f) Viene violato il primo teorema della dualità in quanto $\mathbf{z}^* \neq \mathbf{w}^*$ (Duality gap).

2) Le etichettature, i cammini aumentanti e un taglio ottimo sono i seguenti:





PROVA SCRITTA DEL 27/6/1996

1) Sia dato il seguente problema dello zaino:

oggetto	A	B	C	D
valore	8	11	26	37
peso	3	4	12	14

peso massimo trasportabile = 17

a - Risolverlo con la strategia highest-first, senza le tecniche di accelerazione.

b - Risolverlo con la strategia depth-first, senza le tecniche di accelerazione.

In entrambi i casi disegnare l'albero decisionale, riportando le limitazioni (bound di Dantzig) e numerando i nodi in ordine di esplorazione (radice = 0).

TEMPO SUGGERITO: 30m

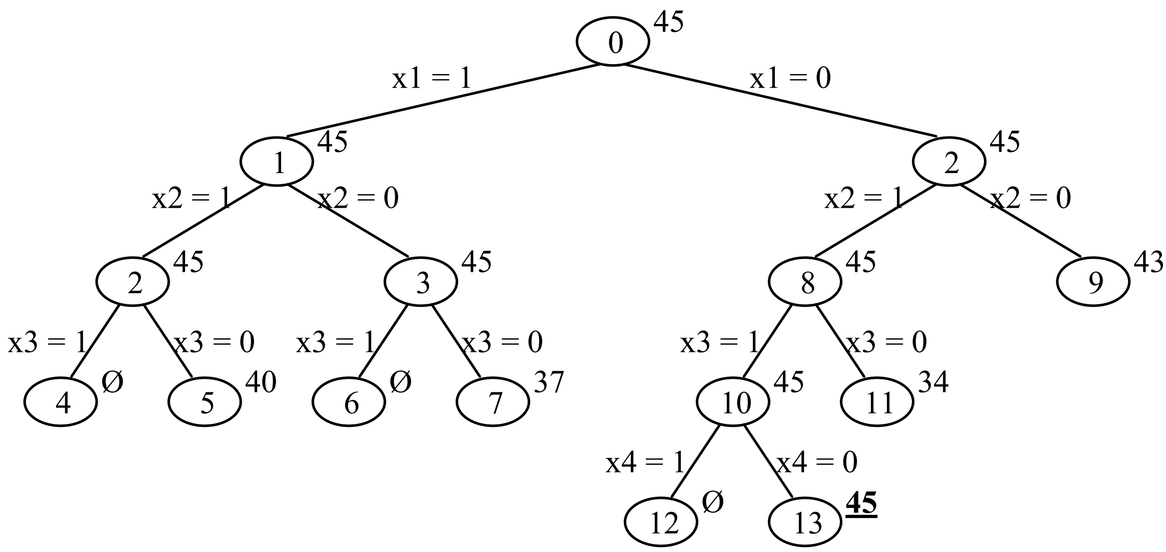
SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 27/6/1996

1a) Ordinando gli oggetti per rapporti valore/peso decrescenti si ha:

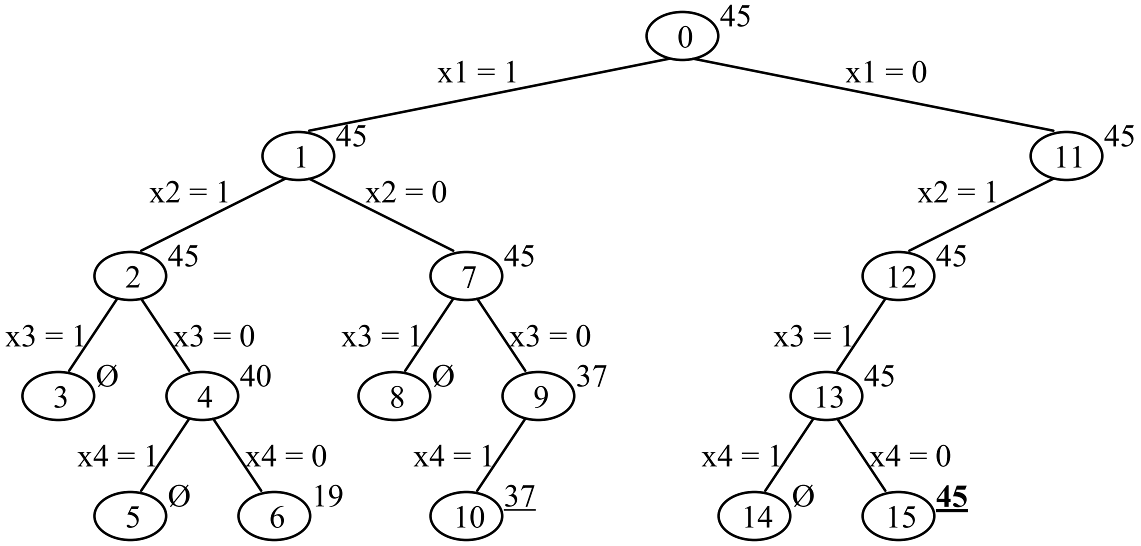
oggetto	B	A	D	C
valore	11	8	37	26
peso	4	3	14	12
variabile	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$

peso massimo trasportabile = 17

L'albero decisionale richiesto è:



1b) L'albero decisionale richiesto è:



PROVA SCRITTA DEL 24/7/1996

1) Sia dato il seguente problema lineare:

$$\begin{array}{ll} & \min \quad \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 \\ \text{s.t.} & 2\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 \geq -1 \\ & 3\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \geq 2 \\ & \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_3 \geq 1 \\ & \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \geq 0 \end{array}$$

a) Risolverlo con l'algoritmo duale del simplesso, scegliendo la variabile entrante più in alto e la variabile uscente più a sinistra.
b) Determinare l'insieme delle soluzioni ottimali.

TEMPO SUGGERITO: 30m

2) Una ditta deve recapitare dei container dalla città A alla città F e può utilizzare differenti corrieri che operano secondo il seguente schema e possono trasportare al massimo il numero di container indicati:

da città	a città	container
A	B	5
A	C	6
B	D	6
B	E	4
C	B	2
C	E	3
D	C	3
D	E	1
D	F	2
E	F	8

Scrivere un opportuno modello per determinare il numero massimo di container che possono essere recapitati.

TEMPO SUGGERITO: 20m

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 24/7/1996

1a) Portando il problema in forma canonica e passando alla tabella associata si ha:

	x_1	x_2	x_3	
u_1	2	1	-1	1
u_2	3	$\boxed{1}$	0	-2
u_3	1	0	1	-1
- z	-1	-1	-1	0

	u_2	x_2	x_3	
u_1	2/3	1/3	-1	7/3
x_1	1/3	-1/3	0	2/3
u_3	$\boxed{1/3}$	-1/3	1	-1/3
- z	-1/3	-2/3	-1	-2/3

	u_3	x_2	x_3	
u_1	2	1	-3	3
x_1	1	0	-1	1
u_2	3	1	-3	1
- z	-1	-1	0	-1

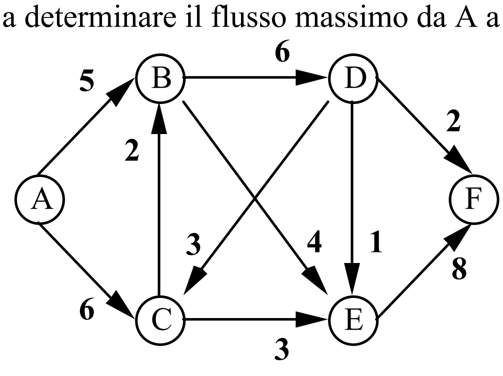
La tabella ottenuta è ottimale e rappresenta il vertice **A** (1, 0, 0) con $\mathbf{z^*} = -\frac{2}{3}$.

1b) La presenza di un coefficiente nullo nella riga della funzione obiettivo dice che possono esistere ulteriori soluzioni ottimali. Facendo cardine sull'elemento di posto 3, 3 si ha:

	u_3	x_2	u_2	
u_1	-1	0	1	2
x_1	0	-1/3	1/3	2/3
x_3	1	1/3	-1/3	1/3
- z	-1	-1	0	-1

La tabella rappresenta il vertice **B** $\left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$, anch'esso ottimale. Una ulteriore applicazione del cardine riporterebbe al vertice **A**, per cui la regione ottimale è il segmento **AB**.

2) Il problema corrisponde a determinare il flusso massimo da A a F sulla seguente rete:



PROVA SCRITTA DEL 12/9/1996

1) Sia dato il seguente problema lineare **P**:

min $z = 3\,\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}$

s.t. $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \geq 0$

$3\ \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \leq 1$

$- \mathbf{x}_1 + 2\ \mathbf{x}_2 \leq 3$

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ libere

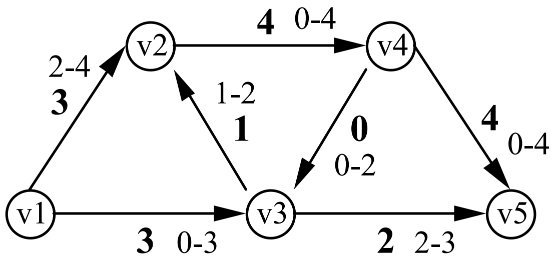
a - Ricondurre il problema **P** alla forma canonica e risolverlo con l'algoritmo del simplesso.

b - Determinare l'insieme delle soluzioni ottimali.

c - Disegnare graficamente il problema **P**.

TEMPO SUGGERITO: 40m

2) Sia dato il seguente problema di flusso da $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_5$, per il quale sono assegnate le capacità minime e massime e il flusso iniziale indicati:



a - Verificare che il taglio individuato dalla partizione $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ e $\{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$ è ottimo.

b - Successivamente si determini con l'algoritmo di Ford e Fulkerson (analizzando i nodi e gli archi in ordine cresente di indice) un flusso massimo da $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_5$, introducendo le seguenti modifiche, alternative tra loro, nella rete:

i) la capacità massima dell'arco $\mathbf{a}_{45}$ è uguale a 5;

ii) la capacità massima dell'arco $\mathbf{a}_{32}$ è uguale a 3;

iii) la capacità massima dell'arco $\mathbf{a}_{13}$ è uguale a 4;

iv) la capacità minima dell'arco $\mathbf{a}_{24}$ è uguale a 1;

v) la capacità minima dell'arco $\mathbf{a}_{43}$ è uguale a 1;

vi) la capacità minima dell'arco $\mathbf{a}_{32}$ è uguale a 0;

TEMPO SUGGERITO: 25m

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 12/9/1996

1a) Definendo $\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_3$ e $\mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_3$ la forma canonica richiesta è:

max $- \mathbf{z}' = - 3\ \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 + 4\ \mathbf{y}_3$

s.t. $- \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 + 2\ \mathbf{x}_3 \leq 0$

$3\ \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 - 2\ \mathbf{y}_3 \leq 1$

$- \mathbf{y}_1 + 2\ \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_3 \leq 3$

$\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3 \geq 0$

Risolvendo il problema ottenuto si ha:

	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	
$\mathbf{u}_1$	1	1	-2 *	0
$\mathbf{u}_2$	-3	1	2	1
$\mathbf{u}_3$	1	-2	1	3
$- \mathbf{z}'$	-3	-1	4	0

	y_1	y_2	u_1	
y_3	1/2	1/2	-1/2	0
u_2	-2	2	-1	1
u_3	3/2	-3/2 *	-1/2	3
- z'	-1	1	-2	0

	y_1	u_3	u_1	
y_3	1	-1/3	-2/3	1
u_2	0	-4/3	-5/3	5
y_2	1	-2/3	-1/3	2
- z'	0	-2/3	-7/3	2

La tabella è ottimale e la soluzione è **y*** = (0, 2, 1), **z'*** = - 2 da cui si ricava:

x* = (-1, 1), **z*** = - 2

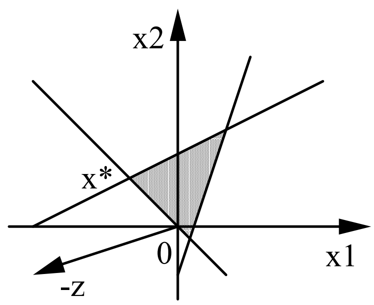
1b) Dalla tabella ottimale si ricava che l'insieme ottimale è formato dallo spigolo illimitato $\mathbf{y}_1 \geq 0$, $\mathbf{u}_1 = 0$, $\mathbf{u}_3 = 0$ a cui corrispondono i punti ($\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_1 + 2$, $\mathbf{y}_1 + 1$) che corrispondono al punto:

$\mathbf{x}_1 = -1$

$\mathbf{x}_2 = 1$

Pertanto x* è l'unica soluzione ottimale.

1c) La rappresentazione richiesta è:



2a) Il taglio ha capacità C = $\mathbf{u}_{13} + \mathbf{u}_{24} - \mathbf{l}_{32}$ = 3 + 4 - 1 = 6 e il valore del flusso iniziale assegnato è F = $\mathbf{x}_{12} + \mathbf{x}_{13}$ = 3 + 3. Per il teorema di Ford e Fulkerson il taglio è minimo e il flusso è massimo.

2b) Nei casi i), ii) iv) non si modifica la capacità del taglio ottimo e il flusso assegnato è ammissibile per cui è massimo.

Nel caso iii) la capacità del taglio aumenta di una unità per cui il flusso assegnato potrebbe non essere massimo. Applicando l'algoritmo richiesto si determina il cammino aumentante $\mathbf{v}_1$ - $\mathbf{v}_3$ - $\mathbf{v}_5$ che incrementa il flusso di una unità e quindi è massimo.

Nel caso v) non si modifica la capacità del taglio ottimo ma il flusso assegnato non è ammissibile per cui è necessario determinare un nuovo flusso ammissibile. Applicando il metodo visto a si determina il cammino aumentante $\mathbf{v}_4$ - $\mathbf{v}_3$ - $\mathbf{v}_5$ - $\mathbf{v}_4$ - con variazione del flusso unitaria; tale flusso è ammissibile e quindi è massimo.

Nel caso vi) la capacità del taglio aumenta di una unità per cui il flusso assegnato potrebbe non essere massimo. Applicando l'algoritmo richiesto si determina il cammino aumentante $\mathbf{v}_1$ - $\mathbf{v}_2$ - $\mathbf{v}_3$ - $\mathbf{v}_5$ che incrementa il flusso di una unità e quindi è massimo.

PROVA SCRITTA DEL 26/9/1996

1) Sia dato il PLI **P**:

min $\mathbf{z} = 4\,\mathbf{x}_1 + 5\,\mathbf{x}_2 + 3\,\mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4$
s.t. $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = 1$
$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + 2\,\mathbf{x}_3 = 1$
$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_4 = 1$
$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 \geq 0$; $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$ interi

Scrivere il problema $\mathbf{P}_S$ ottenuto col rilassamento surrogato dei vincoli di uguaglianza con moltiplicatori unitari, risolvere il problema $\mathbf{P}_S$ con semplici considerazioni e dire se la soluzione ottenuta è ottimale per **P** e perchè.
TEMPO SUGGERITO: 25m

2) Un'industria deve trasferire del materiale tra due filiali site nelle città **A** e **B**. Non essendo le due città collegate da un servizio diretto l'industria può utilizzare dei servizi di trasporto che si appoggiano su sei località intermedie tra **A** e **B**, numerate da **1** a **6**, con i seguenti costi di trasporto:

da città	a città	costo
A	**1**	5
A	**2**	6
A	**3**	3
1	**4**	6
1	**5**	4
2	**5**	4
3	**2**	1
3	**5**	6
3	**6**	6
3	**B**	11
4	**B**	2
5	**4**	2
5	**B**	5
6	**B**	6

Scrivere un opportuno modello per determinare come utilizzare i servizi di trasporto per trasferire il materiale da **A** a **B** minimizzando il costo.
TEMPO SUGGERITO 20m

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 26/9/1996

1) Il problema $\mathbf{P}_S$ è:

min $\mathbf{z}_S = 4\,\mathbf{x}_1 + 5\,\mathbf{x}_2 + 3\,\mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4$
s.t. $3\,\mathbf{x}_1 + 2\,\mathbf{x}_2 + 2\,\mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4 = 3$
$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 \geq 0$; $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$ interi

Assegnando valori interi alle variabili si ottengono le seguenti soluzioni ammissibili:

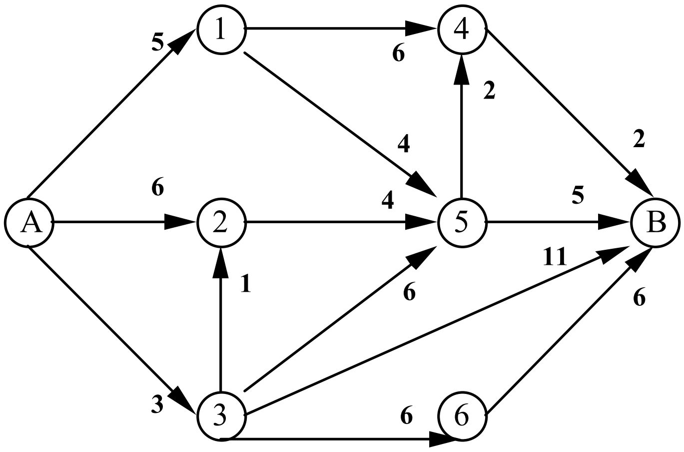
$\mathbf{P}_1$ (1, 0, 0, 0) ; $\mathbf{z}_S(\mathbf{P}_1) = 4$
$\mathbf{P}_2$ (0, 1, 0, 1) ; $\mathbf{z}_S(\mathbf{P}_2) = 6$
$\mathbf{P}_3$ (0, 0, 1, 1) ; $\mathbf{z}_S(\mathbf{P}_3) = 4$
$\mathbf{P}_4$ (0, 0, 0, 3) ; $\mathbf{z}_S(\mathbf{P}_4) = 3$

La soluzione ottimale di $\mathbf{P}_S$ è $\mathbf{P}_4$ che non è ottimale per **P** poichè non è ammissibile in quanto:

$\mathbf{u}_1(\mathbf{P}_4) = 0 + 0 = 0 \neq 1$
$\mathbf{u}_2(\mathbf{P}_4) = 0 + 0 + 0 = 0 \neq 1$

$\mathbf{u}_3(\mathbf{P}_4) = 0 + 3 = 3 \neq 1$

2) Il problema corrisponde a determinare il cammino di costo minimo da A a B sul seguente grafo orientato:



PROVA SCRITTA DEL 5/11/1996

2) Sia data la seguente tabella di un programma lineare:

	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	
$\mathbf{u}_1$	5	2	-2	5
$\mathbf{u}_2$	3	1	-1	2
$\mathbf{z}$	-9	-5	3	0

a - Determinare, se esiste, una soluzione ottimale, usando l'algoritmo del simplesso.
b - Determinare, se esistono, le ulteriori soluzioni ottimali.
TEMPO SUGGERITO: 10m

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 5/11/1996

2a)

	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	
$\mathbf{u}_1$	5	2	-2	5
$\mathbf{u}_2$	3	1	-1	2
$\mathbf{z}$	-9	-5	3	0

Facendo cardine sull'elemento 2 - 3 si ha:

	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{u}_2$	
$\mathbf{u}_1$	-1	0	2	1
$\mathbf{x}_3$	3	1	-1	2
$\mathbf{z}$	0	-2	-3	6

La tabella è ottimale e la soluzione ottimale è $\mathbf{x}^* = (0, 0, 2)$, $\mathbf{z}^* = 6$.

2b) Esistono altre soluzioni ottimali in quanto un coefficiente di $\mathbf{z}$ è nullo e la tabella è non degenere; facendo cardine sull'elemento 1 - 1 si ha:

	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{u}_2$	
$\mathbf{x}_1$	-1	0	2	1
$\mathbf{x}_3$	-3	1	5	5
$\mathbf{z}$	0	-2	-3	6

che fornisce l'ulteriore vertice ottimale $\mathbf{x}° = (1, 0, 5)$.
Pertanto le soluzioni ottimali sono i punti del segmento di estremi $\mathbf{x}^*$ e $\mathbf{x}°$.

PROVA SCRITTA DEL 8/1/1997

2) Sia dato il PLI **P** a variabili 0-1:

$$\begin{array}{lll} \max & \mathbf{z} = 18\,\mathbf{x}_1 + 22\,\mathbf{x}_2 + 36\,\mathbf{x}_3 + 7\,\mathbf{x}_4 & \\ \text{s.t.} & 4\,\mathbf{x}_1 + 3\,\mathbf{x}_2 + 5\,\mathbf{x}_3 + 2\,\mathbf{x}_4 \le 9 & (*) \\ & 2\,\mathbf{x}_1 + 4\,\mathbf{x}_2 + 6\,\mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4 \le 7 & \\ & \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 \in \{0, 1\} & \end{array}$$

Scrivere il problema $\mathbf{P}_L$ ottenuto col rilassamento lagrangiano con moltiplicatore unitario del vincolo (*), risolvere il problema $\mathbf{P}_L$ e dire se la soluzione ottenuta è ottimale per **P** e perchè.
TEMPO SUGGERITO: 25m

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 8/1/1997

2a) Il problema $\mathbf{P}_L$ è:

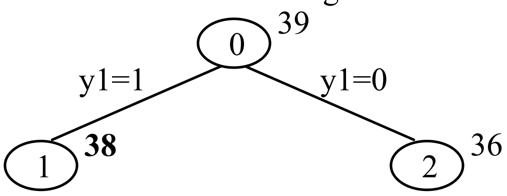
$$\begin{array}{ll} \max & \mathbf{z}_L = 14\,\mathbf{x}_1 + 19\,\mathbf{x}_2 + 31\,\mathbf{x}_3 + 5\,\mathbf{x}_4 + 9 \\ \text{s.t.} & 2\,\mathbf{x}_1 + 4\,\mathbf{x}_2 + 6\,\mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4 \le 7 \\ & \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

Il problema ottenuto equivale al seguente problema dello zaino, per il quale sono stati riordinati gli oggetti per rapporti valore/peso decrescenti:

Valore	14	31	5	19
Peso	2	6	1	4
Variabile associata	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$

Peso massimo trasportabile: 7

Utilizzando le tecniche di accelerazione si ha il seguente albero decisionale:



La soluzione $\mathbf{y}^* = (1, 0, 1, 1)$ corrisponde a $\mathbf{x}_L = (1, 1, 0, 1)$ che è ottimale per **P** in quanto:

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{x}_L) = -4 - 3 + 0 - 2 + 9 \ge 0$$
$$\mathbf{z}_L(\mathbf{x}_L) = 18 + 22 + 0 + 7 = 47$$
$$\mathbf{z}(\mathbf{x}_L) = 14 + 19 + 0 + 5 + 9 = 47$$

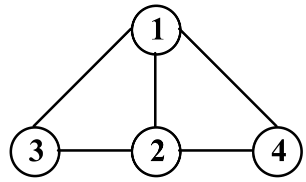
PROVA SCRITTA DEL 6/2/1997

1) I corridoi di un centro di ricerche devono essere controllati da un sorvegliante posto in una

delle piazzole agli estremi di ciascun corridoio.

a - Scrivere un modello lineare a variabili 0 - 1 che permetta di minimizzare il numero dei sorveglianti.

b - Scrivere in forma analitica il problema duale del problema ottenuto applicando il modello precedente all'esempio raffigurato a lato (considerare le variabili duali a valori 0 - 1 e le variabili primali non negative).



c - Specificare il significato delle variabili, dei vincoli e della funzione obiettivo del problema duale.

TEMPO SUGGERITO: 35m

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 6/2/1997

1a) Definendo le variabili 0 - 1 $\mathbf{x_i}$ come:

$$\mathbf{x_i} = \begin{cases} 1 \text{ se c'è un sorvegliante nella piazzola } \mathbf{i} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

si hanno i vincoli:

$\mathbf{x_i} + \mathbf{x_j} \geq 1$ se le piazzole **i** e **j** sono agli estremi di un corridoio almeno una deve essere occupata da un sorvegliante

e la funzione obiettivo:

min $\sum_i \mathbf{x_i}$ minimizzare il numero dei sorveglianti

1b) Il problema associato all'esempio è:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & \mathbf{z} = \mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} + \mathbf{x_3} + \mathbf{x_4} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} \geq 1 \\ & \mathbf{x_1} + \mathbf{x_3} \geq 1 \\ & \mathbf{x_1} + \mathbf{x_4} \geq 1 \\ & \mathbf{x_2} + \mathbf{x_3} \geq 1 \\ & \mathbf{x_2} + \mathbf{x_4} \geq 1 \end{aligned}$$

Il suo duale può essere scritto nella forma:

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & \mathbf{w} = \mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} + \mathbf{u_3} + \mathbf{u_4} + \mathbf{u_5} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} + \mathbf{u_3} \leq 1 \\ & \mathbf{u_1} + \mathbf{u_4} + \mathbf{u_5} \leq 1 \\ & \mathbf{u_2} + \mathbf{u_4} \leq 1 \\ & \mathbf{u_3} + \mathbf{u_5} \leq 1 \end{aligned}$$

1c) Assegnando alle variabili valore 1 se il corrispondente corridoio è "occupato" e 0 altrimenti, i vincoli esprimono che per ogni piazzola al più uno tra i corridoi da essa uscenti può essere "occupato" e la funzione obiettivo richiede di massimizzare il numero di corridoi "occupati".

PROVA SCRITTA DEL 20/2/1997

2) Sia dato il PLI :

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & \mathbf{z} = \mathbf{x_1} - \mathbf{x_2} - \mathbf{x_3} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x_1} - \mathbf{x_2} + 2\,\mathbf{x_3} \geq -1 \\ & 2\,\mathbf{x_1} - \frac{3}{2}\,\mathbf{x_2} + \mathbf{x_3} \leq \frac{5}{2} \\ & \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3} \geq 0;\ \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3} \text{ interi} \end{aligned}$$

Risolvere il problema con l'algoritmo di Gomory, scegliendo la variabile uscente più a sinistra, la variabile entrante più in alto e generando i tagli a partire dalla riga più in alto.
TEMPO SUGGERITO: 25m

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 20/2/1997

2a) La tabella a coefficienti interi è la seguente:

	x_1	x_2	x_3	
$\mathbf{u}_1$	1	-1	2	1
$\mathbf{u}_2$	-4 *	3	-2	5
$\mathbf{z}$	1	-1	-1	0

	$\mathbf{u}_2$	x_2	x_3	
$\mathbf{u}_1$	-1/4	-1/4	3/2	9/4
x_1	-1/4	3/4	-1/2	5/4
$\mathbf{z}$	-1/4	-1/4	-3/2	5/4

La tabella è ottimale ma la soluzione $\mathbf{x} = \left(\frac{5}{4}, 0, 0\right)$, $\mathbf{z} = \frac{5}{4}$ non è intera. A partire dalla riga di $\mathbf{u}_1$ si genera il vincolo $\mathbf{u}_3 = \frac{1}{4}\ \mathbf{u}_2 + \frac{1}{4}\ x_2 + \frac{1}{2}\ x_3 - \frac{1}{4}$:

	$\mathbf{u}_2$	x_2	x_3	
$\mathbf{u}_1$	-1/4	-1/4	3/2	9/4
x_1	-1/4	3/4	-1/2	5/4
$\mathbf{u}_3$	1/4 *	1/4	1/2	-1/4
$\mathbf{z}$	-1/4	-1/4	-3/2	5/4

	$\mathbf{u}_3$	x_2	x_3	
$\mathbf{u}_1$	-1	0	2	2
x_1	-1	1	0	1
$\mathbf{u}_2$	4	-1	-2	1
$\mathbf{z}$	-1	0	-1	1

La tabella è ottimale e la soluzione $\mathbf{x}^* = (1, 0, 0)$, $\mathbf{z}^* = 1$ è intera.

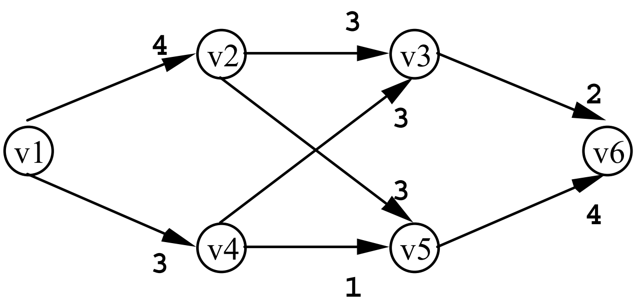
2b) La presenza dello 0 nella riga di $\mathbf{z}$ indica la possibilità di ulteriori soluzioni ottimali; facendo cardine sull'elemento di posto 3 - 2 si ottiene la tabella:

	$\mathbf{u}_3$	$\mathbf{u}_2$	x_3	
$\mathbf{u}_1$	-1	0	2	2
x_1	3	-1	-2	2
x_2	4	-1	-2	1
$\mathbf{z}$	-1	0	-1	1

La tabella è ottimale e la nuova soluzione $\mathbf{x}_1^* = (2, 1, 0)$, $\mathbf{z}^* = 1$ è intera.
L'unico spostamento possibile riporta alla tabella precedente.
Il segmento di estremi $\mathbf{x}^*$ e $\mathbf{x}_1^*$ non contiene ulteriori punti interi.

PROVA SCRITTA DEL 2/4/1997

1) Sia dato il seguente problema di flusso:



a - Determinare con l'algoritmo di Ford e Fulkerson un flusso massimo da $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_6$.

Si analizzino i nodi e gli archi in ordine cresente di indice. Si ridisegni la rete ad ogni iterazione, indicando le etichette di ogni nodo.

b - Determinare un taglio di capacità minima.

TEMPO SUGGERITO: 30m

2) Sia dato il seguente PLI:

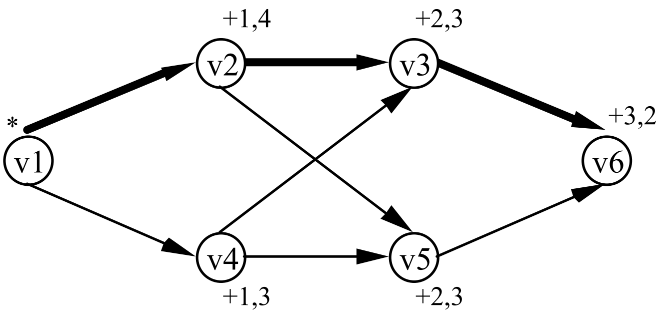
$$\begin{aligned} \max \quad & 4\,\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2\,\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \geq 2 \\ & \mathbf{x}_1 - \tfrac{1}{4}\,\mathbf{x}_2 \leq \tfrac{7}{4} \\ & \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \geq 0 \,;\ \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \text{ interi} \end{aligned}$$

Risolvere il problema con l'algoritmo di Gomory, scegliendo la variabile uscente più a sinistra, la variabile entrante più in basso e generando i tagli a partire dalla riga avente il termine noto con mantissa minima.

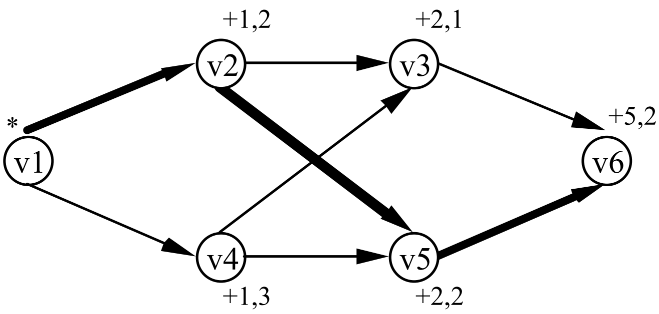
TEMPO SUGGERITO: 30m

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 2/4/1997

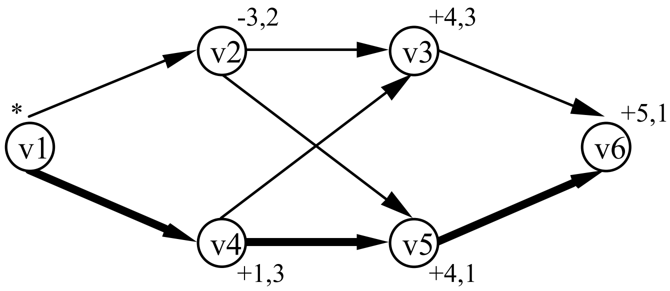
1a) Applicando l'algoritmo richiesto si hanno le seguenti etichettature:



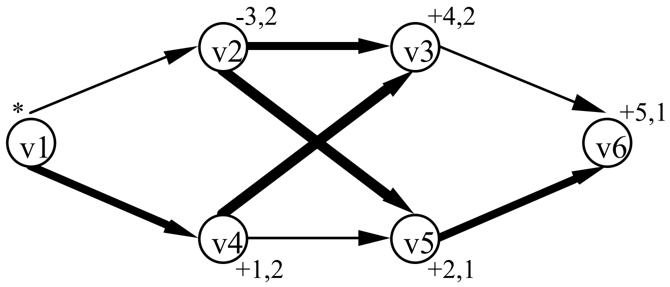
Il cammino aumentante è $\mathbf{v}_1$ - $\mathbf{v}_2$ - $\mathbf{v}_3$ - $\mathbf{v}_6$ con variazione del flusso 2.



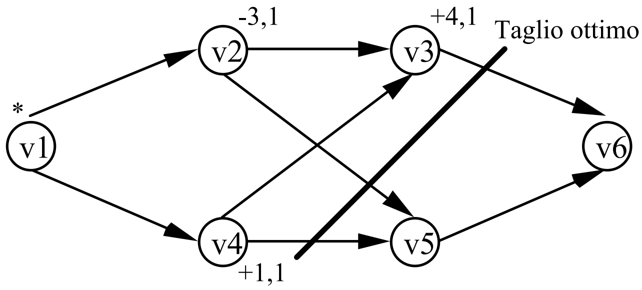
Il cammino aumentante è $\mathbf{v}_1$ - $\mathbf{v}_2$ - $\mathbf{v}_5$ - $\mathbf{v}_6$ con variazione del flusso 2.



Il cammino aumentante è $\mathbf{v}_1$ - $\mathbf{v}_4$ - $\mathbf{v}_5$ - $\mathbf{v}_6$ con variazione del flusso 1.



Il cammino aumentante è $\mathbf{v}_1$ - $\mathbf{v}_4$ - $\mathbf{v}_3$ - $\mathbf{v}_2$ - $\mathbf{v}_5$ - $\mathbf{v}_6$ con variazione del flusso 1.



Non esiste un cammino aumentante per cui l'algoritmo termina. Il flusso massimo vale 6.

1b) Dall'ultima figura si ricava che il taglio ottimo è formato dagli archi $\mathbf{a}_{36}$, $\mathbf{a}_{25}$, $\mathbf{a}_{45}$ aventi capacità 2, 3, 1 per cui la capacità del taglio eguaglia il flusso massimo.

2) La tabella a coefficienti interi è la seguente:

	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	
$\mathbf{u}_1$	2	1	-2
$\mathbf{u}_2$	-4 *	1	7
z	4	-1	0

	$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{x}_2$	
$\mathbf{u}_1$	-1/2	3/2	3/2
$\mathbf{x}_1$	-1/4	1/4	7/4
z	-1	0	7

La tabella è ottimale ma la soluzione x = $\left(\frac{7}{4}\ , 0\right)$, z = 7 non è intera. A partire dalla riga di $\mathbf{u}_1$ si genera il vincolo $\mathbf{u}_3 = \frac{1}{2}\ \mathbf{u}_2 + \frac{1}{2}\ \mathbf{x}_2 - \frac{1}{2}\ = -2\ \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + 3$:

	$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{x}_2$	
$\mathbf{u}_1$	-1/2	3/2	3/2
$\mathbf{x}_1$	-1/4	1/4	7/4
$\mathbf{u}_3$	1/2	1/2 *	-1/2
z	-1	0	7

	$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{u}_3$	
$\mathbf{u}_1$	-2	3	3
$\mathbf{x}_1$	-1/2	1/2	2
$\mathbf{x}_2$	-1	2	1
z	-1	0	7

La tabella è ottimale e la soluzione x* = (2, 1), z* = 7 è intera.