PROVE D'ESAME 1996/97

PROVA PARZIALE DEL 27/11/1996

1) Si consideri il seguente problema di programmazione lineare **P**:

$$\begin{aligned} \max\ & 2\mathbf{x}_1 - 3\mathbf{x}_2 - 2\mathbf{x}_3 \\ \text{s.t.}\ & \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 \le 1 \\ & -\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 \ge 1 \\ & \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 \le 2 \\ & \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \ge 0 \end{aligned}$$

a - Risolvere **P** con l'algoritmo del simplesso.

b - Determinare una soluzione ammissibile di **P** che non sia un vertice (motivare la risposta).

c - Determinare l'insieme delle soluzioni ottimali di **P**.

TEMPO SUGGERITO: 35m

SOLUZIONE DELLA PROVA PARZIALE DEL 27/11/1996

1a) La tabella associata al problema **P** in forma canonica è:

		$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$
$\mathbf{u}_1$	-1	-1	1	1
$\mathbf{u}_2$	0	-1	1	-1
$\mathbf{u}_3$	-1	1	1	2
$\mathbf{z}$	2	-3	-2	0

La tabella rappresenta il vertice non ammissibile **A** = (0, 0, 0).

Facendo cardine sull'elemento di posto 2 - 3 si ha:

	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{u}_2$	
$\mathbf{u}_1$	-1	0	1	2
$\mathbf{x}_3$	0	1	1	1
$\mathbf{u}_3$	-1	2	1	3
$\mathbf{z}$	2	-5	-2	-2

La tabella rappresenta il vertice ammissibile **B** = (0, 0, 1).

Facendo cardine sull'elemento di posto 1 - 1 si ha:

	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{u}_2$	
$\mathbf{x}_1$	-1	0	1	2
$\mathbf{x}_3$	0	1	1	1
$\mathbf{u}_3$	1	2	0	1
$\mathbf{z}$	-2	-5	0	2

La tabella rappresenta il vertice ottimale **C** = (2, 0, 1) con valore $\mathbf{z}^*$ = 2.

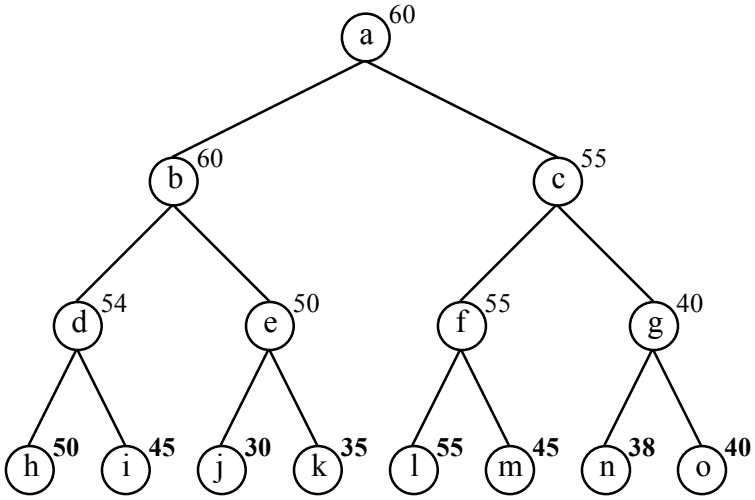
1b) E' sufficiente considerare un punto del segmento di estremi **B** e **C**, ad esempio il punto medio **D** = (1, 0, 1).

1c) Poichè il coefficiente di $\mathbf{u}_2$ nella funzione obiettivo nella tabella ottimale è nullo e gli altri coefficienti della colonna di $\mathbf{u}_2$ sono non negativi esiste uno spigolo illimitato di soluzioni ottimali definito da $\mathbf{u}_1 = 0$, $\mathbf{x}_2 = 0$, $\mathbf{u}_2 \ge 0$, cioè:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 = 1 \\ \mathbf{x}_2 = 0 \\ -\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_3 + 1 \\ \mathbf{x}_2 = 0 \\ \mathbf{x}_3 \ge 1 \end{cases}$$

PROVA PARZIALE DEL 18/4/1997

1) Sia dato il seguente albero decisionale riferito ad un problema di massimo risolto con un algoritmo Branch and Bound, in cui i numeri in chiaro indicano le limitazioni superiori e quelli in grassetto le soluzioni esatte.



a - Utilizzando la strategia highest-first quali nodi vengono analizzati e in quale ordine?
b - Utilizzando la strategia depth-first quali nodi vengono analizzati e in quale ordine?
TEMPO SUGGERITO: 10m

2) Sia dato il seguente problema lineare a variabili 0 - 1 **P**:

$$\max \quad \mathbf{z} = 2\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3$$
$$\text{s.t.} \quad 2\mathbf{x}_1 - 2\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 \leq 2 \qquad (*)$$
$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 \leq 1 \qquad (*)$$
$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \in \{0 - 1\}$$

a - Scrivere il problema $\mathbf{P}_L$ ottenuto con il rilassamento lagrangiano dei vincoli (*) con moltiplicatori unitari e risolvere $\mathbf{P}_L$ per ispezione.
b - Scrivere il problema $\mathbf{P}_S$ ottenuto con il rilassamento surrogato dei vincoli (*) con moltiplicatori rispettivamente 1 e 2 e risolvere $\mathbf{P}_S$ per ispezione.
c - Scrivere il problema $\mathbf{P}_E$ ottenuto con il rilassamento per eliminazione dei vincoli (*) e risolvere $\mathbf{P}_E$ per ispezione.
TEMPO SUGGERITO: 25m

SOLUZIONE DELLA PROVA PARZIALE DEL 18/4/1997

1a) L'ordine richiesto è:
a - b - c - d - e - f - g - l (- m)

1b) L'ordine richiesto è:
a - b - d - h - i - e - c - f - l

2a) Il rilassamento richiesto è:

$$\max \quad \mathbf{z}_L = 2\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + (3 - 3\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 - 2\mathbf{x}_3) = -\mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 + 3$$
$$\text{s.t.} \quad \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \in \{0 - 1\}$$

La soluzione per ispezione fornisce $\mathbf{x}_L^* = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{z}_L^* = 5$.

2b) Il rilassamento richiesto è:

$$\max \quad \mathbf{z}_S = 2\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3$$
$$\text{s.t.} \quad 4\mathbf{x}_1 + 3\mathbf{x}_3 \leq 4$$
$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \in \{0 - 1\}$$

La soluzione per ispezione fornisce $\mathbf{x}_S^* = (1, 1, 0)$ e $\mathbf{z}_S^* = 3$.

2c) Il rilassamento richiesto è:

$$\max \quad \mathbf{z}_E = 2\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3$$
$$\text{s.t.} \quad \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \in \{0 - 1\}$$

La soluzione per ispezione fornisce $\mathbf{x}_E^* = (1, 1, 1)$ e $\mathbf{z}_E^* = 4$.

PROVA PARZIALE DEL 4/6/1997

1) Sia dato il gioco non cooperativo a somma zero a due giocatori in forma normale:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinare, se esistono, gli equilibri di Nash in strategie pure.
TEMPO SUGGERITO: 10m

2) Sia data un'azienda il cui pacchetto azionario è così ripartito tra quattro soci A, B, C, D:
A = 40% - B = 27% - C = 10% - D = 23%
Per poter governare l'azienda è necessario formare delle coalizioni tra i soci.

a - Scrivere le coalizioni di maggioranza nel caso in cui sia necessario avere più della metà delle azioni.
b - Scrivere le coalizioni di maggioranza nel caso in cui sia necessario avere più dei tre quinti delle azioni.
c - Se nei due casi precedenti esistono giocatori fittizi (dummy) dire quali sono.

TEMPO SUGGERITO: 15m

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA PARZIALE DEL 4/6/1997

1) Le migliori risposte del giocatore I sono:

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & -2 \\ \boxed{2} & -1 & \boxed{0} \\ 0 & 1 & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

Le migliori risposte del giocatore II sono:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \boxed{-2} \\ 2 & \boxed{-1} & 0 \\ \boxed{0} & 1 & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

Quindi la coppia (σ_3, σ_3) costituisce l'unico NE.

2) Le percentuali di azioni delle possibili coalizioni di almeno due giocatori sono:

AB	AC	AD	BC	BD	CD	ABC	ABD	ACD	BCD	ABCD
67	50	63	37	50	33	77	90	73	60	100

Pertanto risultano vincenti:

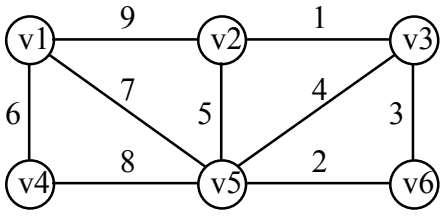
2a)	*		*			*	*	*	*	*
2b)	*		*			*	*	*		*

2c) Nel secondo caso il giocatore C è fittizio in quanto le coalizioni vincenti di cui fa parte ABC, ACD, ABCD sono vincenti anche senza il suo contributo.

PROVA SCRITTA DEL 17/6/97

1) Una fabbrica di tessuti impiega come materie prime cotone e lana per produrre una stoffa "cotone caldo" composta da 70% di cotone e 30% di lana, una seconda stoffa "lana fresca" composta da 20% di cotone e 80% di lana e una terza stoffa "ognitempo" composta da 50% di cotone e 50% di lana.
La fabbrica dispone di 10 tonnellate di cotone e di 15 tonnellate di lana.
   a - Scrivere un modello lineare che permetta di determinare la produzione massima globale di stoffa nonchè la quantità prodotta di ciascun tipo di stoffa.
   Risolvere il problema di programmazione lineare con l'algoritmo del simplesso, scegliendo la variabile uscente più a sinistra e la variabile entrante più in alto.
   b - Modificare il modello aggiungendo l'ipotesi che per la stoffa "ognitempo" la percentuale di cotone possa oscillare tra il 40% e il 50% e la percentuale di lana tra il 50% e il 60%.
   Risolvere il problema di programmazione lineare con l'algoritmo del simplesso, scegliendo la variabile uscente più a sinistra e la variabile entrante più in alto.
TEMPO SUGGERITO: 45m

2) Sia dato il seguente grafo:



Determinare un albero di peso minimo (minimum spanning tree), utilizzando l'algoritmo di Kruskaal.
TEMPO SUGGERITO: 15m

3) Sia dato il seguente problema dello zaino:

Oggetto	A	B	C	D	E
Valore	18	15	10	6	2
Peso	7	5	3	3	2

Peso massimo trasportabile = 13
Risolverlo con l'algoritmo Branch and Bound, utilizzando il bound di Dantzig, la strategia highest first e le tecniche di accelerazione.
TEMPO SUGGERITO: 15m

4) Sia dato il gioco cooperativo a pagamenti laterali definito da:
   N = {1, 2, 3}
   v(1) = v(2) = 0; v(3) = 1; v(12) = v(23) = 2; v(13) = v(123) = 3
Determinare il valore di Shapley e dire se appartiene al nucleo del gioco.
TEMPO SUGGERITO: 15m

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 17/6/97

1a) Indicando con $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ le tonnellate di stoffa prodotta per ciascun tipo si hanno i seguenti vincoli:

$0.7\mathbf{x}_1 + 0.2\mathbf{x}_2 + 0.5\mathbf{x}_3 \leq 10$ la quantità di cotone utilizzata non deve superare la disponibilità
$0.3\mathbf{x}_1 + 0.8\mathbf{x}_2 + 0.5\mathbf{x}_3 \leq 15$ la quantità di lana utilizzata non deve superare la disponibilità
$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \geq 0$ non si possono produrre quantità negative
e la funzione obiettivo:
max $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3$ si deve massimizzare la quantità prodotta
Risolvendo con l'algoritmo richiesto si ha:

	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	
$\mathbf{u}_1$	$\boxed{-7}$	-2	-5	100
$\mathbf{u}_2$	-3	-8	-5	150
$\mathbf{z}$	1	1	1	0

	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	
$\mathbf{x}_1$	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{5}{7}$	$\frac{100}{7}$
$\mathbf{u}_2$	$\frac{3}{7}$	$\boxed{-\frac{50}{7}}$	$-\frac{20}{7}$	$\frac{750}{7}$
$\mathbf{z}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{100}{7}$

	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{x}_3$	
$\mathbf{x}_1$	$-\frac{4}{25}$	$\frac{1}{25}$	$-\frac{3}{5}$	10
$\mathbf{x}_2$	$\frac{3}{50}$	$-\frac{7}{50}$	$-\frac{2}{5}$	15
$\mathbf{z}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	0	25

La soluzione ottimale consiste nel produrre 10 tonnellate di "cotone caldo" e 15 tonnellate di "lana fresca".

1b) Indicando con α la percentuale di cotone utilizzata nella stoffa "ognitempo" i vincoli diventano:

$0.7\mathbf{x}_1 + 0.2\mathbf{x}_2 + \alpha\mathbf{x}_3 \leq 10$
$0.3\mathbf{x}_1 + 0.8\mathbf{x}_2 + (1 - \alpha)\mathbf{x}_3 \leq 15$

La soluzione risulta una funzione di α di cui si cerca il massimo per $0.4 \leq \alpha \leq 0.5$.
Questo secondo modello risulta non lineare in quanto è presente il termine $\alpha\mathbf{x}_3$, ma puo' essere visto come un problema lineare parametrico.
Risolvendo con l'algoritmo richiesto si ha:

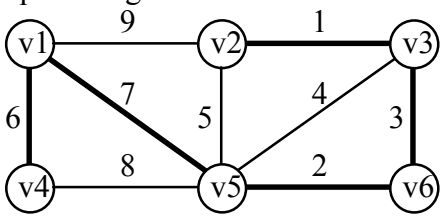
	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	
$\mathbf{u}_1$	$\boxed{-7}$	-2	-10α	100
$\mathbf{u}_2$	-3	-8	$-10+10\alpha$	150
$\mathbf{z}$	1	1	1	0

	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	
$\mathbf{x}_1$	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{10}{7}\alpha$	$\frac{100}{7}$
$\mathbf{u}_2$	$\frac{3}{7}$	$\boxed{-\frac{50}{7}}$	$-10+\frac{100}{7}\alpha$	$\frac{750}{7}$
$\mathbf{z}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{5}{7}$	$1-\frac{10}{7}\alpha$	$\frac{100}{7}$

	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{x}_3$	
$\mathbf{x}_1$	$-\frac{4}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2-10\alpha}{5}$	10
$\mathbf{x}_2$	$\frac{3}{50}$	$-\frac{7}{50}$	$\frac{-7+10\alpha}{5}$	15
$\mathbf{z}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	0	25

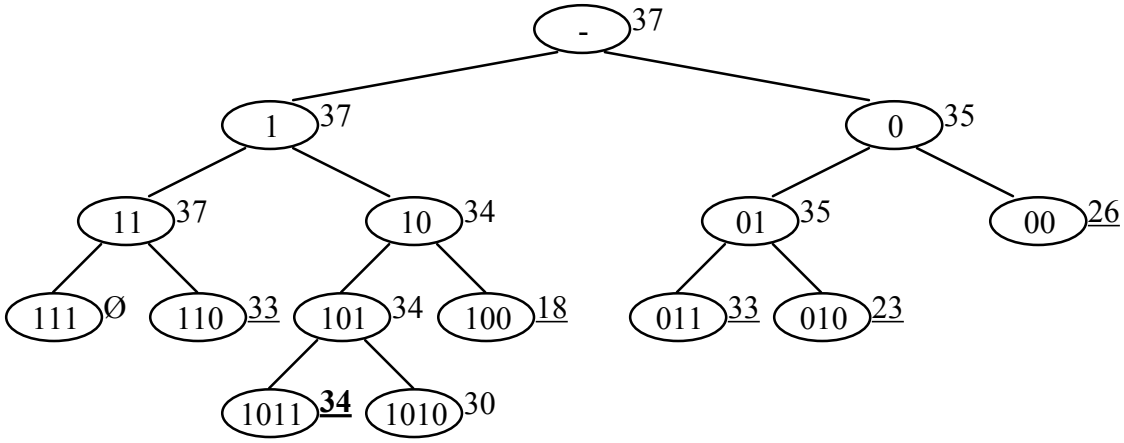
Si perviene allo stesso risultato con considerazioni sulla soluzione ottimale del caso a).

2) Lo spanning tree ottimale è quello seguente:



Gli archi a_{35}, a_{25} non vengono presi perchè formano dei cicli, mentre gli archi a_{12}, a_{45} non vengono considerati poichè si è già trovato uno spanning tree.

3) Si ottiene il seguente albero decisionale:



La soluzione ottimale consiste nel portare gli oggetti A C D con valore 34 e peso 13.

4) Applicando le formule si ha:

$$\varphi = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

Non appartiene al nucleo poichè si ha:

$\varphi_1 + \varphi_2 < v(12)$

PROVA SCRITTA DEL 15/7/97

1) Sia dato il seguente PLI:

$$\max \ \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$$
$$\text{s.t.} \quad 2\,\mathbf{x}_1 + 5\,\mathbf{x}_2 \le 3$$
$$\frac{1}{4}\,\mathbf{x}_1 - \frac{1}{4}\,\mathbf{x}_2 \ge -1$$
$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \ge 0 \ ; \ \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \text{ interi}$$

Risolvere il problema con l'algoritmo di Gomory, scegliendo la variabile uscente più a sinistra, la variabile entrante più in alto e generando i tagli a partire dalla riga più in alto.

TEMPO SUGGERITO: 20m

2) Sia dato un gioco cooperativo a pagamenti laterali in cui il giocatore **i** è di veto, cioè:

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in S \\ 0 & \text{se } i \notin S \end{cases}$$

Dimostrare che il valore di Shapley assegna tutto il valore del gioco al giocatore **i** e che questa imputazione è l'unico elemento del nucleo.
TEMPO SUGGERITO: 15m

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 15/7/97

1) La tabella a coefficienti interi è la seguente:

	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$			$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{x}_2$	
$\mathbf{u}_1$	-2 *	-5	3	$\mathbf{x}_1$	-1/2	-5/2	3/2
$\mathbf{u}_2$	1	-1	4	$\mathbf{u}_2$	-1/2	-7/2	11/2
$\mathbf{z}$	1	-1	0	$\mathbf{z}$	-1/2	-7/2	3/2

La tabella è ottimale ma la soluzione $\mathbf{x} = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$, $\mathbf{z} = \frac{3}{2}$ non è intera. A partire dalla riga di $\mathbf{x}_1$ si genera il vincolo $\mathbf{u}_3 = \frac{1}{2}\ \mathbf{u}_2 + \frac{1}{2}\ \mathbf{x}_2 - \frac{1}{2}$:

	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{x}_2$			$\mathbf{u}_3$	$\mathbf{x}_2$	
$\mathbf{x}_1$	-1/2	-5/2	3/2	$\mathbf{x}_1$	-1	-2	1
$\mathbf{u}_2$	-1/2	-7/2	11/2	$\mathbf{u}_2$	-1	-3	5
$\mathbf{u}_3$	1/2 *	1/2	-1/2	$\mathbf{u}_1$	2	-1	1
$\mathbf{z}$	-1/2	-7/2	3/2	$\mathbf{z}$	-1	-3	1

La tabella è ottimale e la soluzione $\mathbf{x}^* = (1, 0)$, $\mathbf{z}^* = 1$ è intera.

2) Se il giocatore **i** è di veto gli altri sono tutti fittizi e hanno quindi valore di Shapley nullo; pertanto per l'efficienza si ha $\varphi_i(v) = 1$.
Un'altra imputazione dovrebbe avere $x_i < 1$, ma allora si avrebbe $x_i < v(\mathbf{i})$.

PROVA SCRITTA DEL 12/9/97

1) Risolvere il seguente problema dello zaino con l'algoritmo Branch and Bound utilizzando la strategia depth-first, senza le tecniche di accelerazione:

Valore	16	4	13	5	9
Peso	6	2	4	3	3

Peso massimo trasportabile: 9
TEMPO SUGGERITO: 20m

2) Sia dato il gioco cooperativo a pagamenti laterali:
$N = \{1, 2, 3\}$
$v(1) = v(2) = 0$; $v(3) = 1$
$v(12) = v(13) = 1$; $v(23) = 2$
$v(N) = K$
a - Per quali valori di K il nucleo è non vuoto.
b - Per quali valori di K il valore di Shapley è un elemento del nucleo.
TEMPO SUGGERITO: 25m

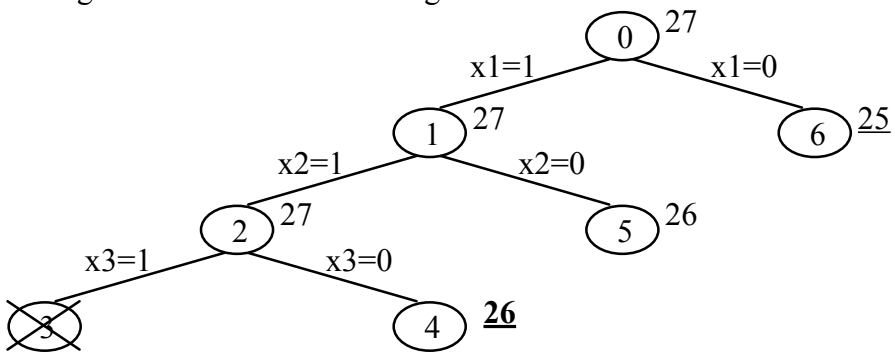
SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 12/9/97

1) Riordinando gli oggetti per rapporti valore/peso decrescenti si ha:

Valore	13	9	16	4	5
Peso	4	3	6	2	3
Variabile associata	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	$\mathbf{x}_5$

Peso massimo trasportabile: 9

Utilizzando l'algoritmo richiesto si ha il seguente albero decisionale:



La soluzione ottimale è x* = (1, 1, 0, 1, 0), z* = 26.

2a) Se $K \geq 2$ l'imputazione $x = \left(0, \frac{K}{2}, \frac{K}{2}\right)$ è nel nucleo, per cui è non vuoto; d'altra parte per $K < 2$ il nucleo è vuoto in quanto $v(23) > v(N)$.

2b) Il valore di Shapley è $\varphi = \left(\frac{2K-3}{6}, \frac{2K}{6}, \frac{2K+3}{6}\right)$; imponendo le relazioni di appartenenza al nucleo, cioè $\sum_{i \in S} \varphi_i \geq v(S)$, si ottiene $K \geq \frac{9}{4}$.

PROVA SCRITTA DEL 26/9/97

1) Sia dato il seguente problema lineare **P**:

$$\max \quad \mathbf{z} = 4\mathbf{x}_1 - 2\mathbf{x}_2 - 2\mathbf{x}_3$$
$$\text{s.t.} \quad \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \leq 1$$
$$2\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 \leq 1$$
$$4\mathbf{x}_1 - 2\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 \leq 5$$
$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \geq 0$$

a - Risolvere **P** con l'algoritmo del simplesso.

b - Determinare tutti i vertici ottimali del problema.

TEMPO SUGGERITO: 25m

2) Sia dato il problema di contrattazione a due giocatori in cui:

$$F = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + 2y \leq 2;\ x \geq 0;\ y \geq 0\}$$
$$v = (1, 0)$$

a - Determinare la soluzione di Nash.

b - Mantenendo lo stesso punto di contrasto, considerare l'insieme ammissibile:

$$F' = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + 2y \leq 2;\ x \geq 1;\ y \geq 0\}$$

e determinare la soluzione di Nash.

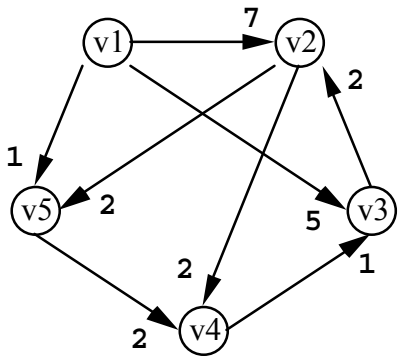
c - Mantenendo lo stesso punto di contrasto, considerare l'insieme ammissibile:

$F'' = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + 2y \leq 2;\ x - y \leq 1;\ x \geq 0;\ y \geq 0\}$

e determinare la soluzione di Nash.

TEMPO SUGGERITO: 20m

3) Dato il grafo seguente:



determinare le lunghezze dei cammini minimi da $\mathbf{v}_1$ agli altri nodi, utilizzando l'algoritmo di correzione di Ford e variante di Bellman, ordinando gli archi secondo indici crescenti.

TEMPO SUGGERITO: 20m

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 26/9/97

1) La tabella associata a **P** è la seguente:

	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	
$\mathbf{u}_1$	-1	1	0	1
$\mathbf{u}_2$	-2	1	1	1
$\mathbf{u}_3$	-4	2	1	5
$\mathbf{z}$	4	-2	-2	0

Facendo cardine sull'elemento 2 - 1 si ha:

	$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	
$\mathbf{u}_1$	1/2	1/2	-1/2	1/2
$\mathbf{x}_1$	-1/2	1/2	1/2	1/2
$\mathbf{u}_3$	2	0	-1	3
$\mathbf{z}$	-2	0	0	2

La tabella è ottimale e la soluzione ottenuta è $\mathbf{x}^* = (1/2, 0, 0)$, $\mathbf{z}^* = 2$. Poichè la tabella è non degenere e vi sono dei coefficienti di **z** nulli vi sono altre soluzioni ottimali.

Lo spigolo $\mathbf{u}_2 = 0$, $\mathbf{x}_3 = 0$, $\mathbf{x}_2 \geq 0$ è illimitato; facendo cardine sull'elemento 1 - 3 si ha:

	$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{u}_1$	
$\mathbf{x}_3$	1	1	-2	1
$\mathbf{x}_1$	0	1	-1	1
$\mathbf{u}_3$	1	-1	2	2
$\mathbf{z}$	-2	0	0	2

La soluzione ottenuta è $\mathbf{x}'^* = (1, 0, 1)$, $\mathbf{z}^* = 2$. Facendo cardine sull'elemento 1 - 3 si torna al caso precedente, mentre facendo cardine sull'elemento 3 - 2 si ha:

	$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{u}_3$	$\mathbf{u}_1$	
$\mathbf{x}_3$	2	-1	0	3
$\mathbf{x}_1$	1	-1	1	3
$\mathbf{x}_2$	1	-1	2	2
$\mathbf{z}$	-2	0	0	2

La soluzione ottenuta è $\mathbf{x}''^* = (3, 2, 3)$, $\mathbf{z}^* = 2$. Lo spigolo $\mathbf{u}_2 = 0$, $\mathbf{x}_3 = 0$, $\mathbf{u}_1 \geq 0$ è illimitato, mentre facendo cardine sull'elemento 3 - 2 si torna al caso precedente.
Esistono quindi 3 vertici ottimali, $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{x}'^*$, $\mathbf{x}''^*$.

2a) La soluzione è data dal punto di massimo su F del prodotto di Nash $(x - v_1)(y - v_2)$ cioè:

$$\Phi(F, v) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

2b) La soluzione è invariata per l'assioma sulle alternative irrilevanti.

2c) La nuova soluzione è:

$$\Phi(F'', v) = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

3) Applicando l'algoritmo richiesto si assegnano le etichette:

`d = (0, •, •, •, •)`

Quindi si ha:

$\mathbf{a}_{12}$	`d = (0, 7, •, •, •)`
$\mathbf{a}_{13}$	`d = (0, 7, 5, •, •)`
$\mathbf{a}_{15}$	`d = (0, 7, 5, •, 1)`
$\mathbf{a}_{24}$	`d = (0, 7, 5, 9, 1)`
$\mathbf{a}_{25}$ - $\mathbf{a}_{32}$ - $\mathbf{a}_{43}$ - $\mathbf{a}_{54}$ (1)	`d = (0, 7, 5, 3, 1)`
$\mathbf{a}_{12}$ - $\mathbf{a}_{13}$ - $\mathbf{a}_{15}$ - $\mathbf{a}_{24}$ - $\mathbf{a}_{25}$ - $\mathbf{a}_{32}$ - $\mathbf{a}_{43}$	`d = (0, 7, 4, 3, 1)`
$\mathbf{a}_{54}$ (2) - $\mathbf{a}_{12}$ - $\mathbf{a}_{13}$ - $\mathbf{a}_{15}$ - $\mathbf{a}_{24}$ - $\mathbf{a}_{25}$ - $\mathbf{a}_{32}$	`d = (0, 6, 4, 3, 1)`
$\mathbf{a}_{43}$ - $\mathbf{a}_{54}$ (3) - $\mathbf{a}_{12}$ - $\mathbf{a}_{13}$ - $\mathbf{a}_{15}$ - $\mathbf{a}_{24}$ - $\mathbf{a}_{25}$ - $\mathbf{a}_{32}$ - $\mathbf{a}_{43}$ $\mathbf{a}_{54}$ (4)	STOP

PROVA SCRITTA DEL 4/11/97

1) Sia dato il seguente problema lineare 0-1 **P**:

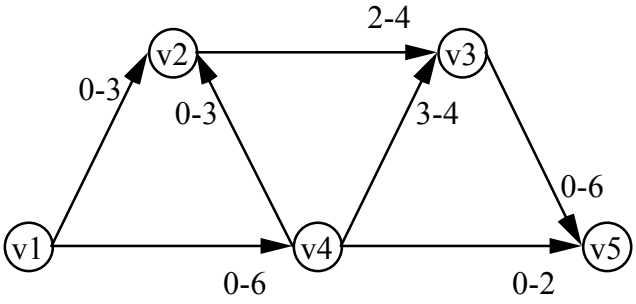
$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 - x_2 - 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 - x_3 \leq 1 \qquad (*) \\ & x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \qquad (*) \\ & x_1, x_2, x_3 \in \{ 0 - 1 \} \end{aligned}$$

a - Determinare il rilassamento lagrangiano $\mathbf{P}_L$ con moltiplicatori unitari dei vincoli (*) e risolverlo per ispezione.

b - Dire se la soluzione ottenuta è ottimale, giustificando la risposta.

TEMPO SUGGERITO: 15m

2) Sia dato il seguente problema di flusso:



Determinare con l'algoritmo di Ford e Fulkerson un flusso ammissibile da $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_5$.
Si analizzino i nodi e gli archi in ordine cresente di indice.

Si ridisegni la rete ad ogni iterazione, indicando le etichette di ogni nodo.
TEMPO SUGGERITO: 25m

3) Sia dato il seguente gioco a due persone a somma zero:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a - Determinare gli equilibri di Nash in strategie pure.
b - Determinare gli equilibri di Nash in strategie miste.
TEMPO SUGGERITO: 40m

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 4/11/97

1a) Il rilassamanto richiesto è:

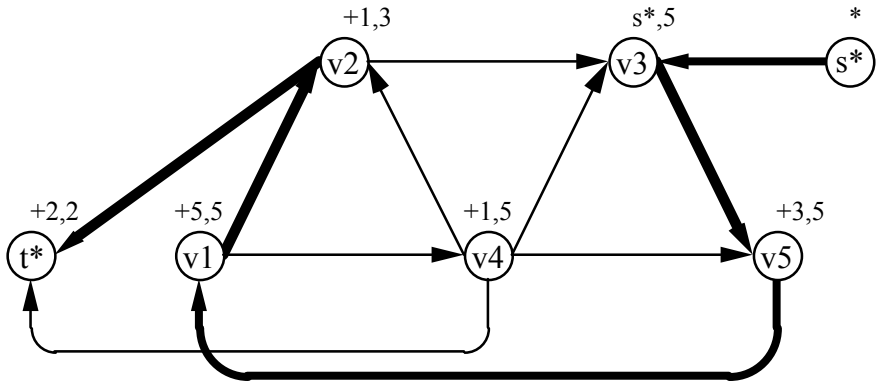
$\max \; z_L = - x_1 + x_2 - x_3$

s.t. $x_1, x_2, x_3 \in \{ 0 - 1 \}$

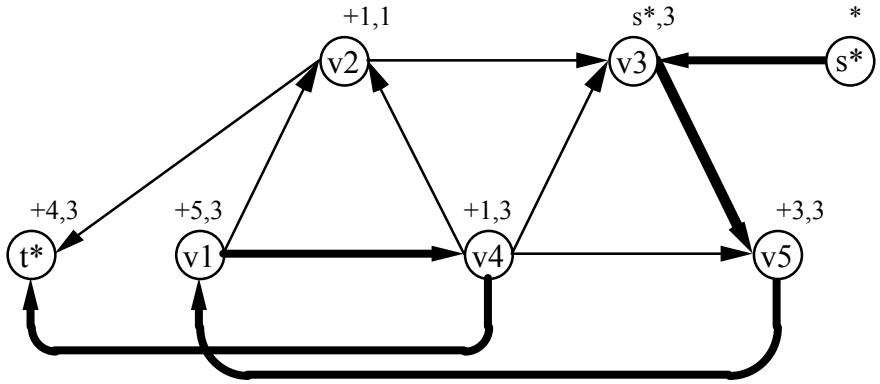
che risolto per ispezione da $x_L = (0, 1, 0)$.

1b) La soluzione non è ottimale perchè $z(x_L) = -1$ mentre $z_L(x_L) = 1$.

2) Assegnando agli archi ($\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$) e ($\mathbf{v}_4$, $\mathbf{v}_3$) un flusso pari alla capacità minima e applicando l'algoritmo alla rete ausiliaria con **s*** e **t***, si ha:

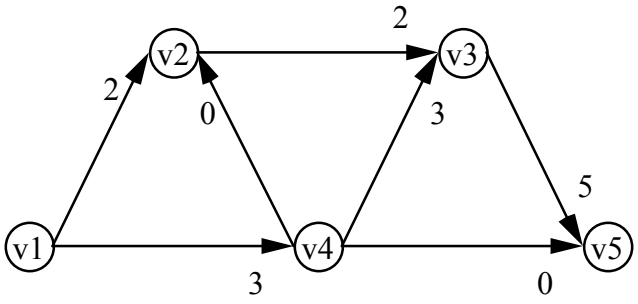


Il cammino aumentante è **s*** - $\mathbf{v}_3$ - $\mathbf{v}_5$ - $\mathbf{v}_1$ - $\mathbf{v}_2$ - **t*** con variazione del flusso 2.



Il cammino aumentante è **s*** - $\mathbf{v}_3$ - $\mathbf{v}_5$ - $\mathbf{v}_1$ - $\mathbf{v}_4$ - **t*** con variazione del flusso 3.

Ripartendo da **s*** non si può etichettare alcun nodo, per cui il flusso è massimo ed è ammissibile in quanto satura gli archi uscenti da **s*** e gli archi entranti in **t***.
Il flusso ammissibile per la rete originaria è:



3a) Innanzitutto si può eliminare la seconda colonna che è dominata dalla prima:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Evidenziando le migliori risposte del primo giocatore con * e le migliori risposte del secondo giocatore con $_*$ si ha:

$$\begin{pmatrix} -2_* & 2^* \\ 1^* & -1_* \end{pmatrix}$$

cioè non esistono equilibri di Nash in strategie pure.

3b) Si deve risolvere il programma lineare:

$$\begin{aligned} \max\ & v_I \\ \text{s.t.}\ & -2x_1 + x_2 - v_I \geq 0 \\ & 2x_1 - x_2 - v_I \geq 0 \\ & x_1 + x_2 = 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Riportandolo in forma canonica si ha la tabella:

	x_1	x_2	v_I^+	v_I^-	
y_1	-2	1	-1	1	0
y_2	2	-1	-1	1	0
v_{II}	-1 *	-1	0	0	1
v_I	0	0	1	-1	0

	v_{II}	x_2	v_I^+	v_I^-	
y_1	2	3 *	-1	1	-2
y_2	-2	-3	-1	1	2
x_1	-1	-1	0	0	1
v_I	0	0	1	-1	0

	v_{II}	y_1	v_I^+	v_I^-	
x_2	-2/3	1/3	1/3	-1/3	2/3
y_2	0	-1	-2 *	2	0
x_1	-1/3	-1/3	-1/3	1/3	1/3
v_I	0	0	1	-1	0

	v_{II}	y_1	y_2	v_I^-	
x_2	-2/3	1/6	-1/6	0	2/3
v_I^+	0	-1/2	-1/2	1	0
x_1	-1/3	-1/6	1/6	0	1/3
v_I	0	-1/2	-1/2	0	0

Da cui si ricava $x^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ e $y^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e valore del gioco $v_I = 0$.

PROVA SCRITTA DEL 9/1/98

1) Risolvere il seguente problema dello zaino con l'algoritmo Branch and Bound utilizzando la strategia depth-first, senza le tecniche di accelerazione:

Valore	14	22	31	25	40
Peso	6	7	9	11	15

Peso massimo trasportabile: 28

TEMPO SUGGERITO: 30m

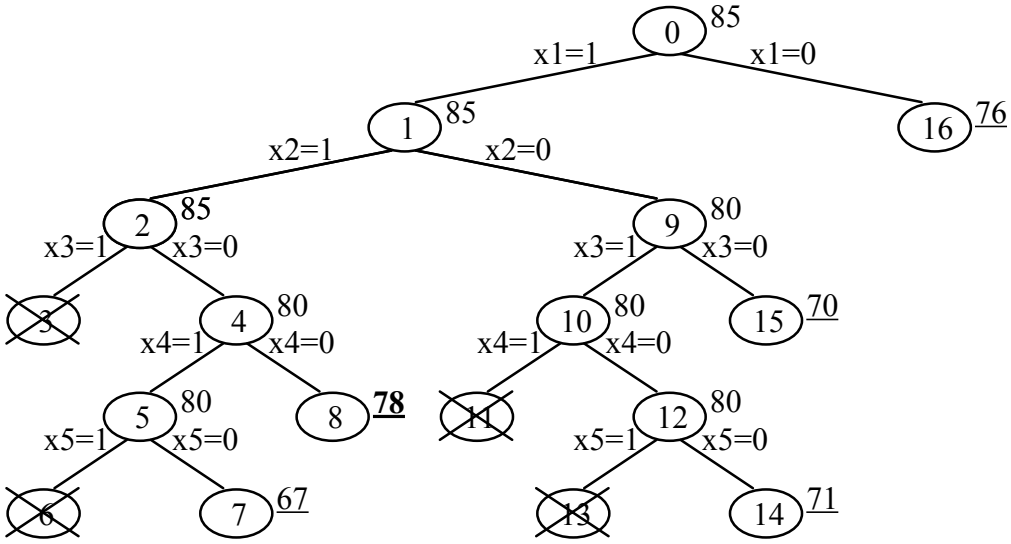
SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 9/1/98

1) Riordinando gli oggetti per rapporti valore/peso decrescenti si ha:

Valore	31	22	40	14	25
Peso	9	7	15	6	11
Variabile associata	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	$\mathbf{x}_5$

Peso massimo trasportabile: 28

Utilizzando l'algoritmo richiesto si ha il seguente albero decisionale:



La soluzione ottimale è $x^* = (1, 1, 0, 0, 1)$, $z^* = 78$.

PROVA SCRITTA DEL 17/2/98

1) Sia dato il seguente problema 0-1:

max $z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4$
s.t. $x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$
$x_1 + x_3 - x_4 \leq 1$
$x_i \in \{0\text{-}1\}$

a) Scrivere il rilassamento lagrangiano con moltiplicatori 1 e 2 rispettivamente.
b) Determinare se la soluzione del problema rilassato è ottimale per il problema dato.
TEMPO SUGGERITO: 20m

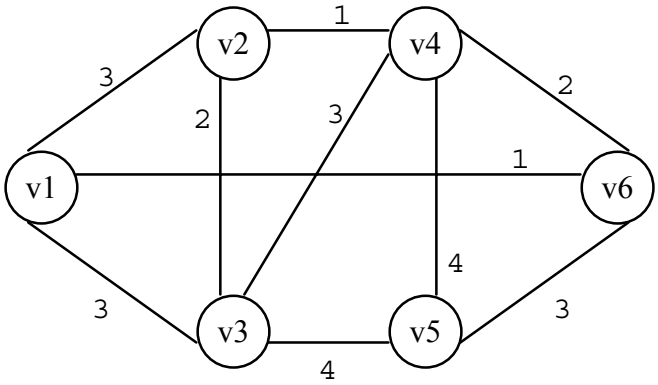
SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 17/2/98

1a) Il problema rilassato è:
max $z_L = - x_1 + x_4 + 4$
s.t. $x_i \in \{0\text{-}1\}$

1b) Le soluzioni possibili sono $x_1 = (0, 0, 0, 1)$, $x_2 = (0, 1, 0, 1)$, $x_3 = (0, 0, 1, 1)$, $x_4 = (0, 1, 1, 1)$ con valore ottimale $z_L = 5$.
Le soluzioni trovate sono tutte ammissibili per il problema dato con valori rispettivamente $z_1 = -1$, $z_2 = 0$, $z_3 = 2$, $z_4 = 3$, per cui nessuna è certamente ottimale.

PROVA SCRITTA DEL 17/4/98

1) Determinare un albero ricoprente di peso minimo per il seguente grafo:

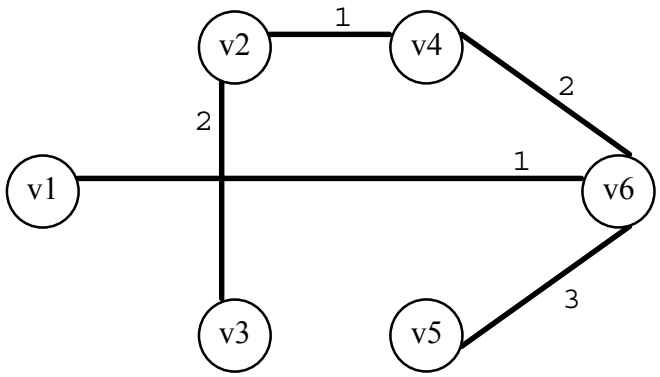


Si applichi l'algoritmo di Prim, analizzando nodi e archi per indici crescenti. Per ogni iterazione si scriva l'arco aggiunto.
TEMPO SUGGERITO: 10m

2) Risolvere con l'algoritmo di Gomory il seguente PLI:
max $2\,\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + 2\,\mathbf{x}_3$
s.t. $-3\,\mathbf{x}_1 + 2\,\mathbf{x}_2 - 6\,\mathbf{x}_3 \leq 4$
$2\,\mathbf{x}_1 - 5\,\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 \leq 6$
$-\mathbf{x}_1 + 4\,\mathbf{x}_2 + 2\,\mathbf{x}_3 \leq 4$
$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \geq 0$ e interi
Si scelga la variabile uscente più a destra e la variabile entrante più in alto e si generino i tagli utilizzando la riga più in alto.
TEMPO SUGGERITO: 50m

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 17/4/98

1) Si aggiungono ordinatamente gli archi:
a_{16} - a_{46} - a_{24} - a_{23} - a_{56}
ottenendo il seguente albero:



2) Applicando l'algoritmo richiesto si ha:

	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	
$\mathbf{u}_1$	3	-2	6	4
$\mathbf{u}_2$	-2 *	5	-1	6
$\mathbf{u}_3$	1	-4	-2	4
z	2	1	2	0

	$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	
$\mathbf{u}_1$	-3/2	11/2	9/2	13
$\mathbf{x}_1$	-1/2	5/2	-1/2	3
$\mathbf{u}_3$	-1/2	-3/2 *	-5/2	7
z	-1	6	1	6

	$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{u}_3$	$\mathbf{x}_3$	
$\mathbf{u}_1$	-10/3	-11/3	-14/3	116/3
$\mathbf{x}_1$	-4/3	-5/3	-14/3	44/3
$\mathbf{x}_2$	-1/3	-2/3	-5/3	14/3
z	-3	-4	-9	34

La tabella è ottimale ma la soluzione x = $\left(\frac{44}{3}, \frac{14}{3}, 0\right)$, z = 34 non è intera; dalla riga di $\mathbf{u}_1$ si genera il vincolo $\mathbf{u}_4$:

	$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{u}_3$	$\mathbf{x}_3$	
$\mathbf{u}_1$	-10/3	-11/3	-14/3	116/3
$\mathbf{x}_1$	-4/3	-5/3	-14/3	44/3
$\mathbf{x}_2$	-1/3	-2/3	-5/3	14/3
$\mathbf{u}_4$	1/3	2/3 *	2/3	-2/3
z	-3	-4	-9	34

	$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{u}_4$	$\mathbf{x}_3$	
$\mathbf{u}_1$	-3/2	-11/2	-1	35
$\mathbf{x}_1$	-1/2	-5/2	-3	13
$\mathbf{x}_2$	0	-1	-1	4
$\mathbf{u}_3$	-1/2	3/2	-1	1
z	-1	-6	-5	30

La tabella è ottimale e la soluzione x* = (13, 4, 0), z* = 30 è intera.