PROVE D'ESAME 1997/98

PROVA PARZIALE DEL 28/11/1997

1) Si consideri il seguente problema di programmazione lineare **P**:

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{z} = \mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2 \\ \text{s.t.} & \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \geq 6 \\ & 2\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \leq 10 \\ & \mathbf{x}_1 \leq 4 \\ & \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \geq 0 \end{array}$$

a - Scrivere le equazioni del problema **P** in forma canonica e del suo duale **P***.

b - Risolvere **P** e **P*** con l'algoritmo del simplesso, scegliendo la variabile entrante più a sinistra e la variabile uscente più in alto.

c - Determinare la regione ottimale di **P** e di **P***.

d - Disegnare accuratamente la regione ammissibile di **P**.

TEMPO SUGGERITO: 30m

SOLUZIONE DELLA PROVA PARZIALE DEL 28/11/1997

1a) La forma canonica di **P** è:

$$\begin{array}{ll} \max & -\mathbf{z} = -\mathbf{x}_1 - 2\mathbf{x}_2 \\ \text{s.t.} & -\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \leq -6 \\ & 2\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \leq 10 \\ & \mathbf{x}_1 \leq 4 \\ & \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \geq 0 \end{array}$$

Il duale **P*** è:

$$\begin{array}{ll} \min & -\mathbf{w} = -6\mathbf{u}_1 + 10\mathbf{u}_2 + 4\mathbf{u}_3 \\ \text{s.t.} & -\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 \geq -1 \\ & -\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \geq -2 \\ & \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \geq 0 \end{array}$$

1b) La tabella associata al problema **P** in forma canonica è:

	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	
$\mathbf{u}_1$	1 *	1	-6
$\mathbf{u}_2$	-1	-1	10
$\mathbf{u}_3$	-1	0	4
$-\mathbf{z}$	-1	-2	0

	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{x}_2$	
$\mathbf{x}_1$	1	-1	6
$\mathbf{u}_2$	-2	1 *	-2
$\mathbf{u}_3$	-1	1	-2
$-\mathbf{z}$	-1	-1	-6

	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_2$	
$\mathbf{x}_1$	-1	-1	4
$\mathbf{x}_2$	2	1	2
$\mathbf{u}_3$	1	1	0
$-\mathbf{z}$	-3	-1	-8

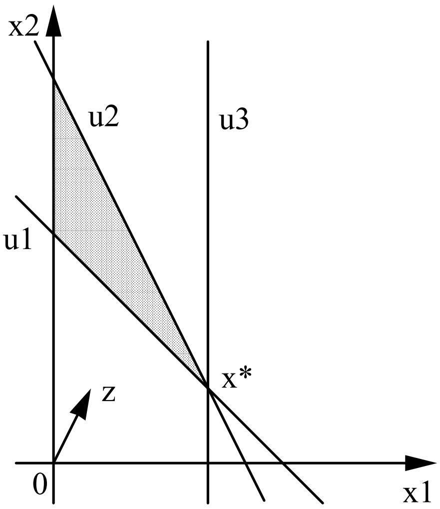
La tabella rappresenta il vertice ottimale primale **x*** = (4, 2) con valore **z*** = 8 e il vertice ottimale duale **u*** = (3, 1, 0) con valore **w*** = 8

1c) Poichè i coefficienti di **-z** sono negativi il primale non ha altre soluzioni ottimali.
La presenza di un termine nullo nella colonna dei termini noti può far pensare ad altre soluzioni ottimali per **P***; facendo cardine sull'elemento 3, 2 si ottiene la seguente tabella:

	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_3$	
$\mathbf{x}_1$	0	-1	4
$\mathbf{x}_2$	1	1	2
$\mathbf{u}_2$	-1	1	0
-z	-2	-1	-8

La tabella rappresenta il vertice ottimale duale **u°** = (2, 0, 1) con valore **w*** = 8
Facendo cardine sull'elemento 3, 2 si ritorna alla tabella precedente per cui la regione ottimale è costituita dal segmento di estremi **u*** e **u°**.

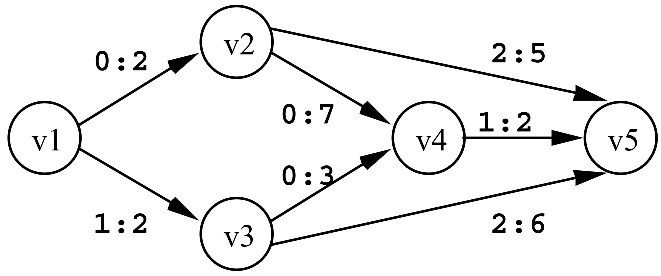
1d) Graficamente si ha:



PROVA SCRITTA DEL 3/2/1998

1) Una ditta ha **n** succursali che vuole appaltare ad **m** agenti. La succursale j ha un giro di affari di $\mathbf{t}_j$ miliardi e la ditta vuole ripartire le succursali tra gli agenti in modo che nessuno di essi abbia un giro dei affari superiore a **T** miliardi. Inoltre per ragioni di concorrenza le prime **p** succursali devono essere date a **p** agenti differenti.
Detto $\mathbf{c}_{ij}$ il costo di assegnare all'agente **i** la succursale **j**, scrivere un modello lineare intero per determinare l'assegnazione delle succursali in modo da minimizzare i costi.
TEMPO SUGGERITO: 20m

2) Determinare se esiste un flusso ammissibile per il seguente problema di flusso massimo:



TEMPO SUGGERITO: 20m

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 3/2/1998

1a) Definendo le variabili 0-1 $\mathbf{x}_{ij}$ come:

$\mathbf{x}_{ij}$ = 1 se l'agente **i** riceve la succursale **j**

0 altrimenti

si hanno i vincoli:

$\sum_i \mathbf{x}_{ij} = 1$ ogni succursale deve essere assegnata

$\sum_j \mathbf{t}_j \mathbf{x}_{ij} \leq \mathbf{T}$ il giro di affari delle succursali assegnate all'agente **i** non deve superare **T** miliardi

$\sum_{j=1,p} \mathbf{x}_{ij} \leq 1$ nessun agente deve ricevere più di una tra le prime **p** succursali

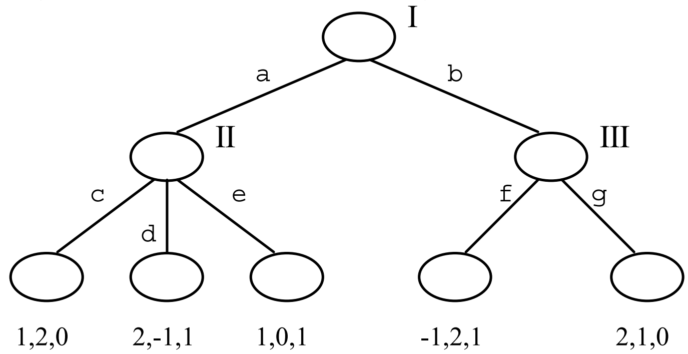
e la funzione obiettivo:

min $\sum_{ij} \mathbf{c}_{ij} \mathbf{x}_{ij}$ minimizzare il costo delle assegnazioni

2) E' sufficiente osservare che il flusso massimo che può uscire dalla sorgente è strettamente minore del flusso minimo che deve entrare nel pozzo, per concludere che non esiste un flusso ammissibile.

PROVA PARZIALE DEL 28/4/1998

1) Sia dato il seguente gioco in forma estesa, con tre giocatori I, II, III:



Determinare la forma strategica.

TEMPO SUGGERITO: 10m

2) Sia dato il problema di contrattazione a due giocatori in cui:

$F = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \leq - y^2 + 3;\ x \geq 1;\ y \geq 0\}$

$v = (1, 0)$

a - Determinare la soluzione di Nash.

b - Mantenendo lo stesso punto di contrasto, considerare l'insieme ammissibile:

$F' = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \leq - y^2 + 3;\ 3x + 2y - 9 \leq 0;\ x \geq 1;\ y \geq 0\}$

e determinare la soluzione di Nash.

TEMPO SUGGERITO: 15m

SOLUZIONE DELLA PROVA PARZIALE DEL 28/4/1998

1) III = **f**

	c	**d**	**e**
a	1, 2, 0	2, -1, 1	1, 0, 1
b	-1, 2, 1	-1, 2, 1	-1, 2, 1

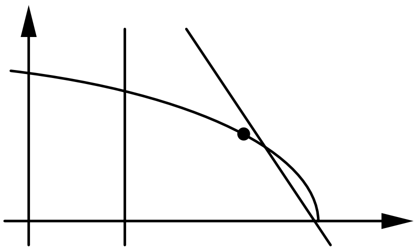
III = **g**

	c	**d**	**e**
a	1, 2, 0	2, -1, 1	1, 0, 1
b	2, 1, 0	2, 1, 0	2, 1, 0

2a) La soluzione è data dal punto (x, y) di F che massimizza il prodotto di Nash $(x - v_1)(y - v_2)$:

$$\Phi(F, v) = \left(\frac{7}{3}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

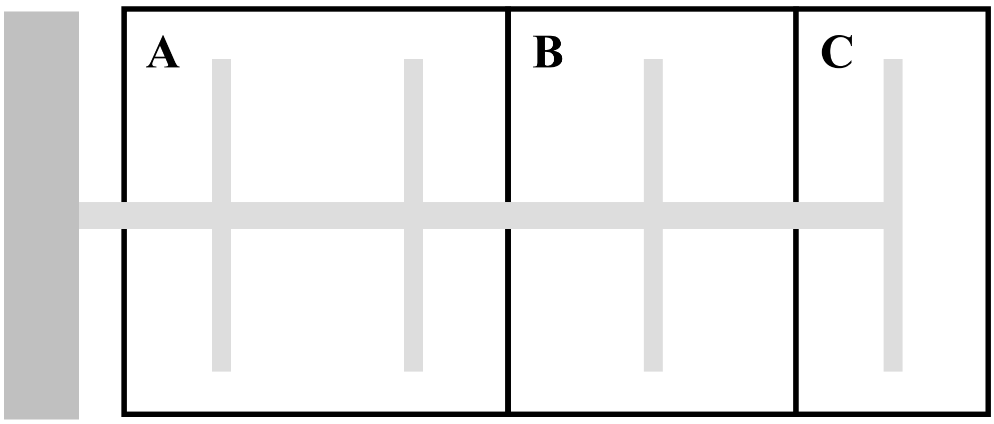
2b) Poichè $\Phi(F, v)$ è un punto di F' la soluzione è invariata per l'assioma sulle alternative irrilevanti.



PROVA PARZIALE DEL 9/6/1998

1) Sia dato il gioco a quattro giocatori in forma caratteristica definito da:
$v(S) = | S |$ = cardinalità di S $\quad\quad | S | \leq 4$
$v(\emptyset) = 0$
Calcolare il valore di Shapley.
TEMPO SUGGERITO: 15m

2) Tre appezzamenti di terreno A, B, C devono collegarsi ad un canale di irrigazione secondo il progetto illustrato in figura IN GRIGIO CHIARO.



In qualità di esperti determinare un opportuno criterio di allocazione dei costi, ovviamente richiedendo tutte le informazioni necessarie e motivando il criterio proposto.

SOLUZIONE DELLA PROVA PARZIALE DEL 9/6/1998

1) Poichè il gioco è additivo il valore di Shapley per ogni giocatore è dato da $\varphi_i(v) = v(i) = 1$.

PROVA SCRITTA DEL 15/6/1998

1) Un vetraio deve sistemare il vetro in tre finestre F1, F2, F3 aventi rispettivamente misure in metri 1.0×1.0, 1.2×1.5, 0.8×1.8 e dispone di tre lastre di vetro L1, L2, L3 aventi rispettivamente misure in metri 1.0×2.0, 1.5×1.6, 2.0×2.0. Poichè nessuna lastra si adatta

alle finestre è necessario tagliare le lastre con un costo di 10$ per ogni metro di taglio.

a - Scrivere un opportuno modello per determinare quale lastra deve essere sistemata in ciascuna finestra in modo da minimizzare i costi.

b - Risolvere numericamente il modello ottenuto.

TEMPO SUGGERITO: 30m

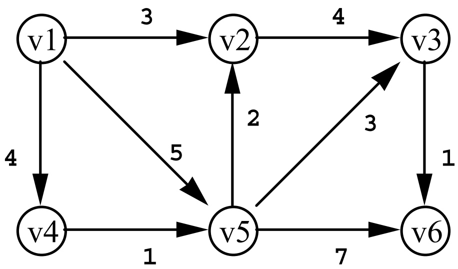
2) Sia dato il seguente gioco di costi TU in forma caratteristica:

$c(1) = 8$; $c(2) = 10$; $c(3) = 9$; $c(12) = 15$; $c(13) = 17$; $c(23) = 16$; $c(123) = 23$.

Determinare la soluzioni EC, ACA, CG.

TEMPO SUGGERITO: 30m

3) Determinare il cammino minimo da v_1 agli altri vertici utilizzando l'algoritmo di Dijkstra e analizzando i vertici per indice crescente.



Per ogni iterazione riportare il vettore delle etichette, il vettore dei predecessori e l'etichetta che diventa esatta.

TEMPO SUGGERITO: 30m

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 15/6/1998

1a) Il problema equivale a un problema di assegnazione lastra/finestra in cui il costo di assegnazione è dato dal costo del taglio. Con semplici calcoli e osservando che la lastra L1 non può essere sistemata nella finestra F2 e la lastra L2 non può essere sistemata nella finestra F3 si ottiene la seguente matrice dei costi:

	F1	F2	F3
L1	10	M	26
L2	20	15	M
L3	20	27	26

1b) Risolvendo il problema con l'algoritmo Branch and Bound si ha:

	F1	F2	F3
L1	0^{10}	M	10
L2	5	$\mathbf{0}^{\mathbf{12}}$	M
L3	0^{0}	7	0^{10}

L = 10 + 15 + 20 + 6 = 51

(L2/F2)

	F1	F3
L1	$\mathbf{0}^{\mathbf{10}}$	10
L3	0^{0}	0^{10}

L = 51

(not L2/F2)

L = 51 + 12 = 63

(L2/F2)(L1/F1)
F3
L3 0
L = 51

(L2/F2) (not L1/F1)
L = 51 + 10 = 61

La soluzione ottimale è sistemare la lastra L1 nella finestra F1, la lastra L2 nella finestra F2, la lastra L3 nella finestra F3 con un costo di 51$ equivalenti a tagli per 5.1 metri ripartiti come segue 1.0 metri sulla lastra L1, 1.5 metri sulla lastra L2, 0.8 + 1.8 metri sulla lastra L3.

2) Applicando i criteri richiesti si ha:

m(1) = 7	m(2) = 6	m(3) = 8
g(123) = 2		
r(1) = 1	r(2) = 4	r(3) = 1
g(1) = 1	g(2) = 2	g(3) = 1

da cui:

EC(1) = 7.66	EC(2) = 6.66	EC(3) = 8.66
ACA(1) = 7.33	ACA(2) = 7.33	ACA(3) = 8.33
CG(1) = 7.50	CG(2) = 7.00	CG(3) = 8.50

3)

d	0	∞	∞	∞	∞	∞	**pred**	1	-	-	-	-	-	**h** = 1
	0	3	∞	4	5	∞		1	1	-	1	1	-	**h** = 2
	0	**3**	7	4	5	∞		1	1	2	1	1	-	**h** = 4
	0	**3**	7	**4**	5	∞		1	1	2	1	1	-	**h** = 5
	0	**3**	7	**4**	**5**	12		1	1	2	1	1	5	**h** = 3
	0	**3**	**7**	**4**	**5**	8		1	1	2	1	1	3	**h** = 6

STOP

PROVA SCRITTA DEL 17/7/1998

1) Con riferimento al problema dello zaino definire analiticamente i seguenti vincoli:
a - Si porta l'oggetto **A** solo se non si portano entrambi gli oggetti **B** e **C**.
b - Si porta l'oggetto **A** se e solo se non si portano entrambi gli oggetti **B** e **C**.
TEMPO SUGGERITO: 20m

2) Sia dato il seguente gioco TU in forma caratteristica:
$v(1) = v(2) = v(3) = 1$; $v(12) = \mathbf{k}$; $v(13) = 3$; $v(23) = 4$; $v(123) = 5$.
dove **k** può assumere qualsiasi valore tra 0 e 5.
a - Determinare il valore di Shapley (in funzione di **k**).
b - Per quali valori di **k** il valore di Shapley è una imputazione.
c - Per quali valori di **k** il valore di Shapley sta nel nucleo del gioco.
TEMPO SUGGERITO: 20m

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 17/7/1998

1a) $\mathbf{x}_A + \mathbf{x}_B + \mathbf{x}_C \leq 2.$

1b) $2\,\mathbf{x}_A + \mathbf{x}_B + \mathbf{x}_C = 2.$

2a) Applicando la definizione si ha:

$$\varphi(1) = \frac{5+\mathbf{k}}{6} \qquad \varphi(2) = \frac{8+\mathbf{k}}{6} \qquad \varphi(3) = \frac{17-2\mathbf{k}}{6}$$

2b) Poichè il valore di Shapley è efficiente basta imporre la razionalità individuale, da cui si ottiene $1 \leq \mathbf{k} \leq 5$.

2c) Imponendo la razionalità di coalizione si ottiene $\mathbf{k} = 1$.

PROVA SCRITTA DEL 7/1/1999

1) Sia dato il seguente problema di programmazione **P**:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \mathbf{x}_1 + 4\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = 1 \\ & 2\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4 \leq 3 \qquad (*) \\ & \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 \in \{0 - 1\} \end{aligned}$$

Sia $\mathbf{P}_L$ il problema ottenuto col rilassamento lagrangiano del vincolo (*) con moltiplicatore unitario.

a - Risolvere $\mathbf{P}_L$ utilizzando considerazioni elementari.

b - Dire se la soluzione ottenuta è ottimale per **P**.

TEMPO SUGGERITO: 20m

SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 7/1/1999

1a) Il problema $\mathbf{P}_L$ è dato da:

$$\begin{aligned} \max \quad & z_L = \mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2 - 2\mathbf{x}_3 + 3 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = 1 \\ & \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 \in \{0 - 1\} \end{aligned}$$

La soluzione per ispezione fornisce $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = 1$, $\mathbf{x}_3 = 0$, $\mathbf{x}_4$ qualsiasi, ma il vincolo di uguaglianza impone di scegliere $\mathbf{x}_1 = 0$, $\mathbf{x}_2 = 1$, poichè $\mathbf{x}_2$ ha il coefficiente maggiore.

1b) La soluzione $\mathbf{x}' = (0, 1, 0, 0)$ non è ottimale per **P** poichè è ammissibile ma $z_L(\mathbf{x}') = 5$ mentre $z(\mathbf{x}') = 4$. Invece la soluzione $\mathbf{x}'' = (0, 1, 0, 1)$ è ottimale per **P** poichè è ammissibile e $z_L(\mathbf{x}'') = z(\mathbf{x}'') = 5$