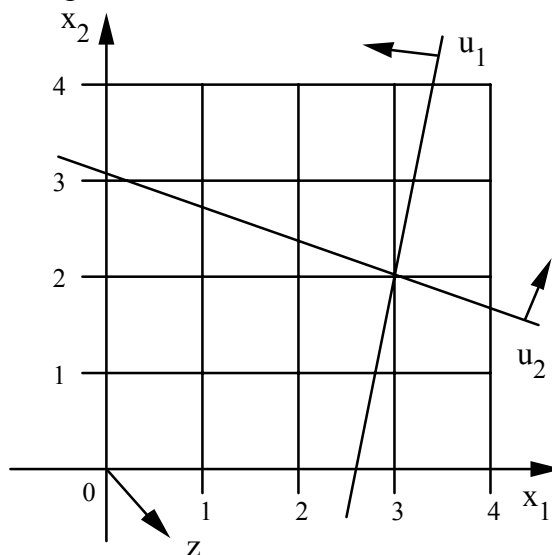


# PROVE D'ESAME 1998/99

## PROVA PARZIALE DEL 24/11/1998

- 1) Si consideri il problema di programmazione lineare in forma canonica rappresentato graficamente dalla seguente figura:



a cui corrisponde la seguente tabella ottimale:

|       | $y_1$ | $y_2$ |   |
|-------|-------|-------|---|
| $y_3$ | a     | b     | c |
| $y_4$ | d     | e     | f |
| $z$   | g     | h     | i |

- a - Quali sono le variabili in base e quali quelle fuori base.  
 b - Quali coefficienti della tabella sono certamente non negativi e quali certamente non positivi. Giustificare la risposta.  
 c - Quali coefficienti della tabella possono essere determinati esattamente e quanto valgono. Giustificare la risposta.

TEMPO SUGGERITO: 15m

- 2) Si consideri il seguente problema dello zaino:

| oggetto | A  | B  | C  | D |
|---------|----|----|----|---|
| valore  | 40 | 21 | 20 | 1 |
| peso    | 13 | 7  | 6  | 3 |

peso massimo trasportabile = 15

Risolverlo con la strategia highest-first senza tecniche di accelerazione.

Completare la soluzione con l'albero decisionale.

Non è richiesta la forma analitica dei sottoproblemi.

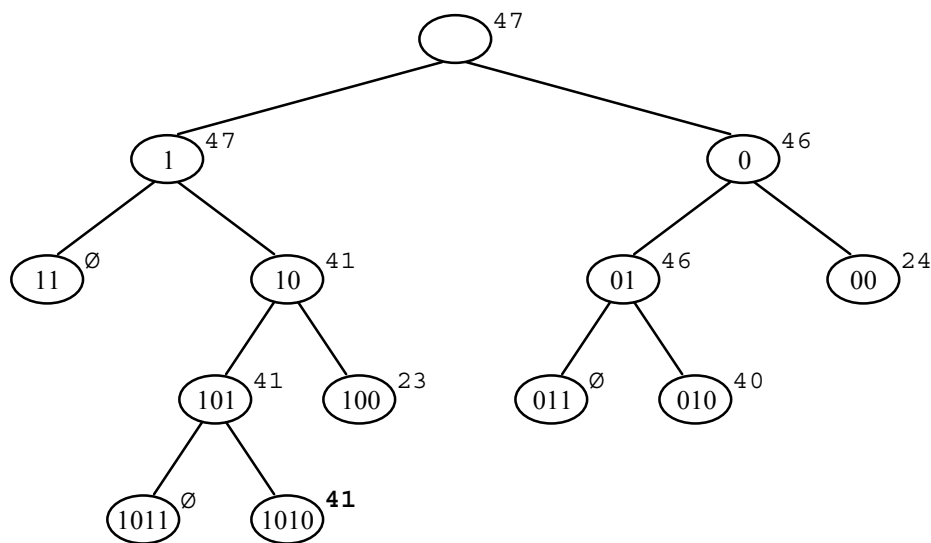
TEMPO SUGGERITO: 20m

## SOLUZIONE DELLA PROVA PARZIALE DEL 24/11/1998

- 1a) Una possibile scelta è:

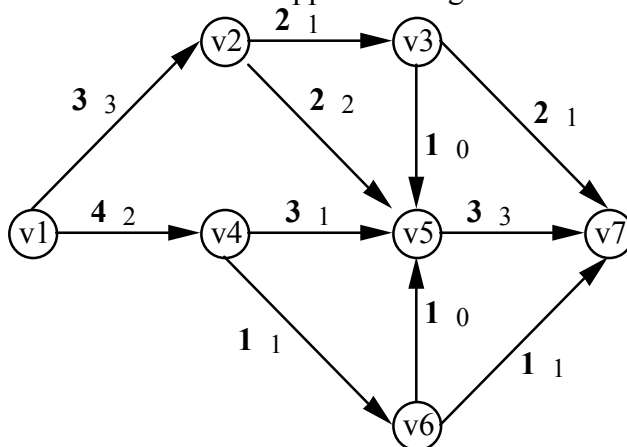
$$y_1 = u_1 ; y_2 = u_2 ; y_3 = x_1 ; y_4 = x_2$$

- 1b) I coefficienti certamente non negativi sono:  
 c, f (per l'ammissibilità)  
 b, e (perchè lo spigolo  $u_1 = 0$  è illimitato).  
 a (il vertice  $x_2 = 0$  ;  $u_2 = 0$  ha  $u_1 < 0$ )  
 I coefficienti certamente non positivi sono:  
 g, h (per l'ottimalità)  
 d (il vertice  $x_1 = 0$  ;  $u_2 = 0$  ha  $x_2 > 0$ )
- 1c) Si ha  $c = 3$ ,  $f = 2$  per il valore del punto di ottimo.
- 2) La soluzione è data dal portare gli oggetti B e C con peso 13 e valore 41; l'albero decisionale associato è:



### PROVA PARZIALE DEL 22/12/1998

- 1) Si consideri il problema di flusso massimo rappresentato graficamente dalla seguente rete:



dove i numeri in grassetto rappresentano le capacità massime e i numeri più piccoli rappresentano il flusso iniziale; si suppongano nulle le capacità minime.

Si determini un flusso massimo da  $v_1$  a  $v_7$  utilizzando l'algoritmo di Ford e Fulkerson.

Si esaminino e si etichettino i nodi in ordine crescente di indice e si etichettino tutti i vertici etichettabili adiacenti a quello esaminato.

Completare la soluzione indicando gli archi del taglio ottimo e la sua capacità.

TEMPO SUGGERITO: 20m

2) Si consideri il seguente gioco a due giocatori in forma strategica:

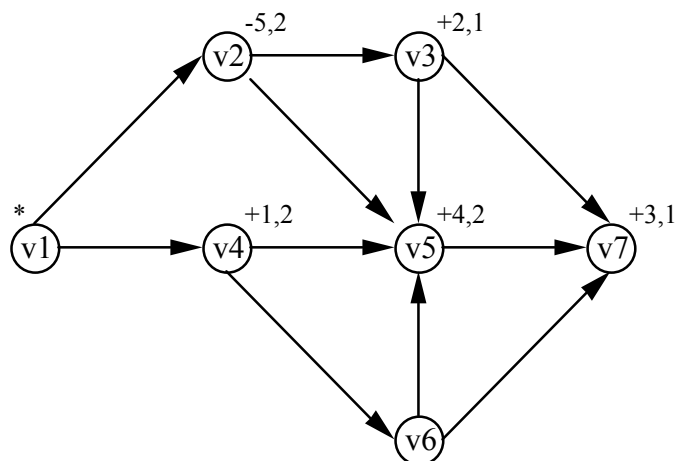
| I \ II | L     | R       |
|--------|-------|---------|
| T      | -1, 2 | 2, 1    |
| M      | 3, 0  | 2k, 0   |
| B      | 4, k  | 3+k, 2k |

- a) Posto  $k = 1$  quali e quanti equilibri di Nash in strategie pure possiede il gioco.  
 b) Determinare al variare del parametro reale  $k$  quali e quanti equilibri di Nash in strategie pure possiede il gioco.

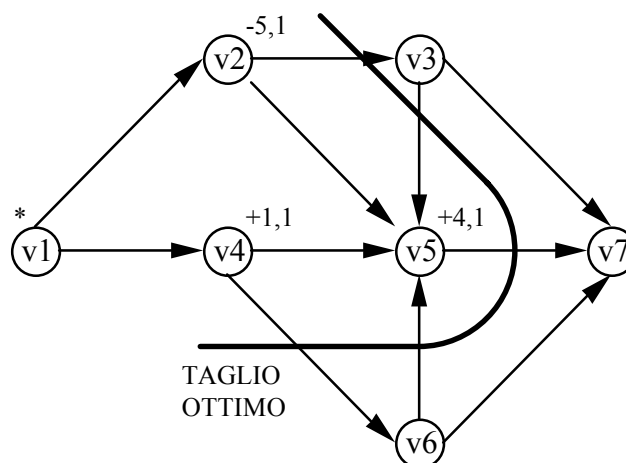
TEMPO SUGGERITO: 20m

### SOLUZIONE DELLA PROVA PARZIALE DEL 22/12/1998

1) Applicando l'algoritmo richiesto si ha:



Si determina il cammino  $v1 - v4 - v5 - v2 - v3 - v7$  con variazione di flusso  $\Delta = 1$ . Iterando si ha:



Il taglio ottimo è composto dagli archi  $a_{23}$ ,  $a_{35}$ ,  $a_{57}$ ,  $a_{65}$ ,  $a_{46}$  la cui capacità è 6.

2a) Posto  $k = 1$  si ha:

| I \ II | L     | R    |
|--------|-------|------|
| T      | -1, 2 | 2, 1 |
| M      | 3, 0  | 2, 0 |
| B      | 4, 1  | 4, 2 |

il cui unico NE in strategie pure è (B, R).

2b) Il gioco ha tre coppie di strategie candidate ad essere NE in strategie pure:

(M, R) - (B, L) - (B, R)

(M, R) è NE se  $2k \geq 2$  e  $2k \geq 3+k$  cioè se  $k \geq 3$ .

(B, L) è NE se  $k \geq 2k$  cioè se  $k \leq 0$

(B, R) è NE se  $2k \geq k$ ,  $3+k \geq 2$  e  $3+k \geq 2k$  cioè se  $0 \leq k \leq 3$ .

### PROVA PARZIALE DEL 26/1/1999

- 1) Si consideri il seguente gioco di costi a tre giocatori in forma caratteristica:  
 $c(1) = 4$ ;  $c(2) = 7$ ;  $c(3) = 4$ ;  $c(12) = 9$ ;  $c(13) = 10$ ;  $c(23) = 10$ ;  $c(123) = 13$
- Determinare il valore di Shapley.
  - Determinare le soluzioni EC, ACA, CG.
  - Quali delle precedenti quattro soluzioni stanno nel nucleo di  $c$ ?
- TEMPO SUGGERITO: 35m

### SOLUZIONE DELLA PROVA PARZIALE DEL 26/1/1999

- 1a) Applicando la formula per il valore di Shapley si ha:  
 $\phi = (3.667, 5.167, 4.167)$
- 1b) Ordinatamente si calcolano:  
 $m = (3, 3, 4)$   
 $g(N) = 3$   
 $r = (1, 4, 0)$   
 $g = (1, 3, 0)$   
 ottenendo:  
 $EC = (4.000, 4.000, 5.000)$   
 $ACA = (3.600, 5.400, 4.000)$   
 $CG = (3.750, 5.250, 4.000)$
- 1c) ACA e CG sono nel nucleo, mentre  $\phi$  ed EC violano  $c(3)$ .

### PROVA SCRITTA DEL 5/2/1999

- 1) Sia dato il problema lineare **P**:
- $$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$
- Determinare l'insieme delle soluzioni ottimali di **P**.
  - Determinare l'insieme delle soluzioni ottimali del duale di **P**.
- TEMPO SUGGERITO: 15m

2) Sia dato il problema lineare  $\{0 - 1\}$  **P**:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 + x_2 + 2x_4 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0 - 1\} \end{aligned}$$

- a) Scrivere il rilassamento surrogato **P<sub>S</sub>** con moltiplicatori unitari dei vincoli di disuguaglianza di **P**.  
 b) Risolvere **P<sub>S</sub>** con semplici considerazioni (riportandole) e dire se la soluzione trovata è ottimale per **P**.

TEMPO SUGGERITO: 25m

3) Sia dato il seguente gioco a due giocatori in forma strategica:

|   |   | II   |      |
|---|---|------|------|
|   |   | L    | R    |
| I | T | 1, 2 | 0, 1 |
|   | B | 2, 2 | 1, 3 |

- a) Determinare, se esistono, gli equilibri di Nash in strategie pure.  
 b) Determinare l'utilità attesa dei due giocatori se giocano le strategie miste:

$$I: \frac{1}{3} T \oplus \frac{2}{3} B \qquad II: \frac{3}{5} L \oplus \frac{2}{5} R$$

TEMPO SUGGERITO: 25m

4) Sia dato il seguente gioco cooperativo a pagamenti laterali ad N giocatori in forma caratteristica:

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{se } T \not\subset S \\ 1 & \text{se } T \subset S \end{cases}$$

dove T è una coalizione prefissata, detta vincente.

Dimostrare che una imputazione sta nel nucleo di v solo se assegna zero ai giocatori non in T.

TEMPO SUGGERITO: 15m

### SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 5/2/1999

1a) Applicando l'algoritmo del simplesso si ha:

|                | x <sub>1</sub> | x <sub>2</sub> |   |
|----------------|----------------|----------------|---|
| u <sub>1</sub> | -1 *           | 1              | 2 |
| u <sub>2</sub> | -2             | -1             | 4 |
| z              | 1              | -3             | 0 |

|                | u <sub>1</sub> | x <sub>2</sub> |   |
|----------------|----------------|----------------|---|
| x <sub>1</sub> | -1             | 1              | 2 |
| u <sub>2</sub> | 2              | -3             | 0 |
| z              | -1             | -2             | 2 |

La tabella fornisce la soluzione ottimale  $x^* = (2, 0)$ ,  $z^* = 2$  che è l'unica soluzione ottimale.

1b) Per quanto riguarda il problema duale la tabella precedente fornisce la soluzione ottimale  $u^* = (1, 0)$ ,  $w^* = 2$  che non è unica; scambiando le variabili  $u_1$  e  $u_2$  si ottiene la tabella:

|       |        |        |     |
|-------|--------|--------|-----|
|       | $u_2$  | $x_2$  |     |
| $x_1$ | $-1/2$ | $-2$   | $2$ |
| $u_1$ | $1/2$  | $3/2$  | $0$ |
| $z$   | $-1/2$ | $-7/2$ | $2$ |

che fornisce l'ulteriore soluzione ottimale duale  $\hat{u}^* = (0, 1/2)$ ,  $w^* = 2$ ; pertanto le soluzioni ottimali del duale sono i punti del segmento di estremi  $u^*$  e  $\hat{u}^*$ .

2a) Il rilassamento richiesto è dato da:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ & 4x_1 + 2x_2 + 2x_4 \leq 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0 - 1\} \end{aligned}$$

2b) La funzione obiettivo suggerisce di "non prendere il terzo oggetto"; il primo vincolo impone di "prendere due oggetti"; il secondo vincolo suggerisce di "prendere o il primo oggetto oppure il secondo e il quarto" quindi si ha:

$$x_S = (0, 1, 0, 1); z(x_S) = 3 + 1 = 4$$

che non è ottimale per **P** poichè non soddisfa  $x_1 + x_2 + 2x_4 \leq 2$  che vieta di "prendere il secondo e il quarto oggetto".

2c) La funzione obiettivo suggerisce di "non prendere il terzo oggetto"; il primo vincolo impone di "prendere due oggetti"; il secondo vincolo impone di "prendere o il primo o il secondo oggetto"; il terzo vincolo suggerisce di "prendere o il primo e il secondo oggetto oppure il quarto" quindi si ha:

$$x^* = (0, 1, 1, 0); z^* = 3 - 1 = 2$$

che non è ottimale per **P** poichè non soddisfa  $x_1 + x_2 + 2x_4 \leq 2$  che vieta di "prendere il secondo e il quarto oggetto".

3a) Sottolineando le migliori risposte si ottiene:

|                       |                    |                                |
|-----------------------|--------------------|--------------------------------|
|                       | $\text{II}$        |                                |
| $\text{I} \backslash$ | $\text{L}$         | $\text{R}$                     |
| $\text{T}$            | $1, \underline{2}$ | $0, 1$                         |
| $\text{B}$            | $\underline{2}, 2$ | $\underline{1}, \underline{3}$ |

quindi (B, R) è un equilibrio di Nash in strategie pure.

3b) Le utilità attese sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} u_I &= \frac{1}{3} \frac{3}{5} \cdot 1 + \frac{1}{3} \frac{2}{5} \cdot 0 + \frac{2}{3} \frac{3}{5} \cdot 2 + \frac{2}{3} \frac{2}{5} \cdot 1 = \frac{19}{15} \\ u_{II} &= \frac{1}{3} \frac{3}{5} \cdot 2 + \frac{1}{3} \frac{2}{5} \cdot 1 + \frac{2}{3} \frac{3}{5} \cdot 2 + \frac{2}{3} \frac{2}{5} \cdot 3 = \frac{32}{15} \end{aligned}$$

4) Presa una imputazione  $x$  per cui  $x_i > 0$  per un  $i \notin T$  si ha  $x(T) \leq 1 - x_i < 1$ , cioè  $x(T) < v(T)$  e quindi  $x$  non sta nel nucleo.

## PROVA SCRITTA DEL 23/2/1999

1) Sia dato il seguente problema dello zaino:

|         |   |   |   |   |    |
|---------|---|---|---|---|----|
| oggetto | A | B | C | D | E  |
| valore  | 3 | 4 | 7 | 7 | 11 |

peso                      4        5        6        8        10  
 peso massimo trasportabile = 12

- a) Risolvere utilizzando il bound di Dantzig e le tecniche di accelerazione.
- b) Determinare tutte le soluzioni ottimali.

Completare la soluzione con l'albero decisionale.

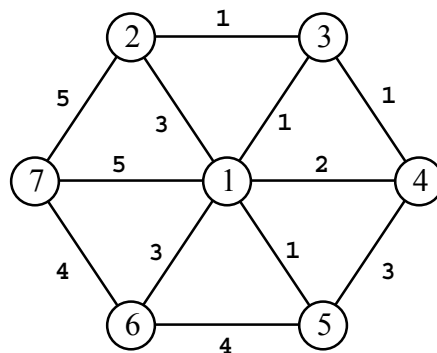
TEMPO SUGGERITO = 25m

- 2) Si consideri il gioco di assegnazione in cui il giocatore 1 è un venditore che offre una merce a cui attribuisce valore  $a_1 = 100$  e i giocatori 2 e 3 sono compratori che attribuiscono alla merce del venditore 1 il valore  $b_{1,2} = 105$  e  $b_{1,3} = 110$  rispettivamente.

- a) Scrivere il gioco in forma caratteristica.
- b) Determinare con semplici considerazioni (riportarle!) una possibile allocazione nel nucleo del gioco.
- c) Ripetere i punti a e b nel caso in cui  $b_{1,2} = 110$ , cioè entrambi i compratori attribuiscono alla merce lo stesso valore.

TEMPO SUGGERITO = 20m

- 3) Sia dato il seguente grafo:



Determinare un albero di peso minimo utilizzando l'algoritmo di Prim e visitando i vertici e gli archi per indici crescenti.

TEMPO SUGGERITO: 20m

### SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 23/2/1999

- 1a) Riordinando gli oggetti per rapporto valore/peso decrescente si ha:

|               |       |       |       |       |       |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| oggetto       | C     | E     | D     | B     | A     |
| valore        | 7     | 11    | 7     | 4     | 3     |
| peso          | 6     | 10    | 8     | 5     | 4     |
| variabile 0-1 | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |

peso massimo trasportabile = 12

$$(-) \max 7x_1 + 11x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 3x_5$$

$$\text{s.t. } 6x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 5x_4 + 4x_5 \leq 12$$

$$L(-) = \left\lfloor 7 + \frac{6}{10} 11 \right\rfloor = 13$$

$$(1) \max 7 + 11x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 3x_5$$

$$\text{s.t. } 10x_2 + 8x_3 + 5x_4 + 4x_5 \leq 6$$

$$L(1) = \left\lfloor 7 + 4 + \frac{1}{4} 3 \right\rfloor = 11$$

$$(0) \max 11x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 3x_5$$

$$\text{s.t. } 10x_2 + 8x_3 + 5x_4 + 4x_5 \leq 12$$

$$L(0) = \left\lfloor 11 + \frac{2}{8} 7 \right\rfloor = 12$$

$$(01) \max 11 + 7x_3 + 4x_4 + 3x_5$$

$$\text{s.t. } 8x_3 + 5x_4 + 4x_5 \leq 2$$

$$L(01) = |11| = 11 \text{ (ammissibile)}$$

$$(00) \max 7x_3 + 4x_4 + 3x_5$$

$$\text{s.t. } 8x_3 + 5x_4 + 4x_5 \leq 12$$

$$L(00) = \left| 7 + \frac{4}{5} 4 \right| = 10$$

La soluzione  $x(01)$  è ottimale, cioè si porta l'oggetto E.

1b) Proseguendo si ha:

$$(11) \max 7 + 11 + 7x_3 + 4x_4 + 3x_5$$

$$\text{s.t. } 8x_3 + 5x_4 + 4x_5 \leq -4$$

$$S_a = \emptyset$$

$$(10) \max 7 + 7x_3 + 4x_4 + 3x_5$$

$$\text{s.t. } 8x_3 + 5x_4 + 4x_5 \leq 6$$

$$L(10) = \left| 7 + 4 + \frac{1}{4} 3 \right| = 11$$

$$(101) \max 7 + 7 + 4x_4 + 3x_5$$

$$\text{s.t. } 5x_4 + 4x_5 \leq -2$$

$$S_a = \emptyset$$

$$(100) \max 7 + 4x_4 + 3x_5$$

$$\text{s.t. } 5x_4 + 4x_5 \leq 6$$

$$L(100) = \left| 7 + 4 + \frac{1}{4} 3 \right| = 11$$

$$(1001) \max 7 + 4 + 3x_5$$

$$\text{s.t. } 4x_5 \leq 1$$

$$L(1001) = |7 + 4| = 11$$

(ammissibile)

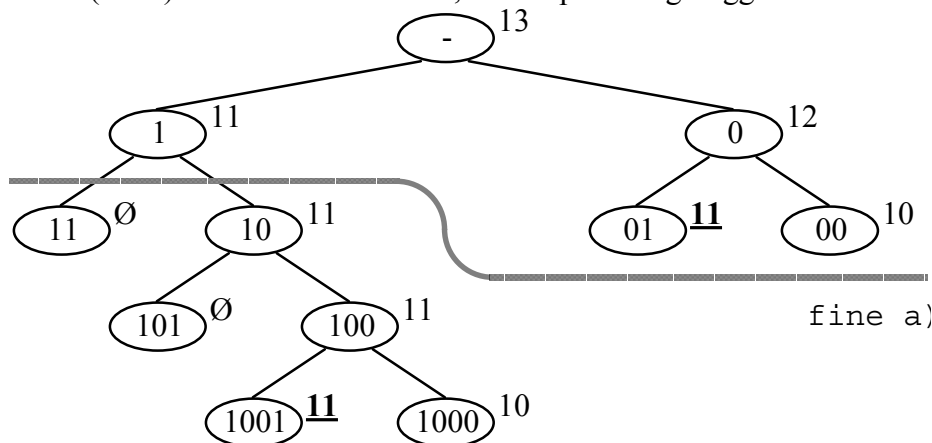
$$(1000) \max 7 + 3x_5$$

$$\text{s.t. } 4x_5 \leq 6$$

$$L(1000) = |7 + 3| = 10$$

(ammissibile)

La soluzione  $x(1001)$  è anche essa ottimale, cioè si portano gli oggetti C e B.



2a) Il gioco in forma caratteristica è dato da:

$$v(1) = v(2) = v(3) = v(23) = 0 ; v(12) = 5 ; v(13) = v(123) = 10$$

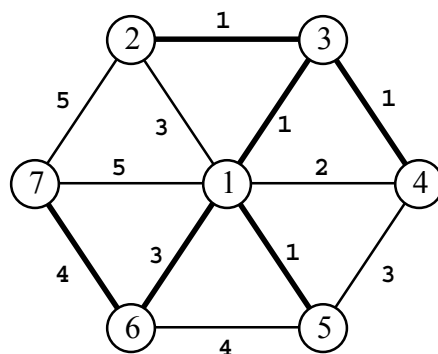
2b) I giocatori 1 e 3 devono ripartirsi il valore del gioco; assegnando 5 al giocatore 1 si soddisfa la coalizione  $\{1, 2\}$  e quindi al giocatore 3 si assegna 5.

$$2c) v(1) = v(2) = v(3) = v(23) = 0$$

$$v(12) = v(13) = v(123) = 10$$

Il giocatore 1 deve ricevere tutto il valore del gioco.

3) Applicando l'algoritmo richiesto si aggiungono successivamente gli archi  $a_{13}$ ,  $a_{15}$ ,  $a_{23}$ ,  $a_{34}$ ,  $a_{16}$ ,  $a_{67}$ , ottenendo il seguente albero:



### PROVA SCRITTA DEL 7/4/1999

1) Sia data la seguente tabella **T** relativa ad un problema lineare **P**:

|       | $u_1$ | $x_3$ | $u_2$ |   |
|-------|-------|-------|-------|---|
| $x_1$ | -1    | -4    | -3    | 0 |
| $x_2$ | 1     | -3    | 2     | 1 |
| $u_3$ | 0     | 2     | -1    | 1 |
| $z$   | 0     | -1    | -1    | 3 |

- Quali punti del problema **P** e del suo duale sono rappresentati dalla tabella **T**.
- Determinare tutte le soluzioni ottimali di **P**.
- Cambiare un solo elemento di **T** in modo che la regione ottimale diventi uno spigolo illimitato.
- Cambiare un solo elemento di **T** in modo che la regione ottimale diventi uno spigolo limitato.

TEMPO SUGGERITO = 20m

2) Si consideri il gioco TU  $(N, v)$  definito da:

$$N = \{1, 2, 3\}$$

$$v(\emptyset) = 0; v(1) = 1; v(2) = 3; v(3) = 2; v(12) = 2; v(13) = 1; v(23) = 3; v(N) = 4$$

- Il gioco  $(N, v)$  è superadditivo?
- Il gioco  $(N, v)$  è a somma costante?
- Calcolare il valore di Shapley  $\phi(v)$ .
- $\phi(v)$  è un elemento del nucleo?

TEMPO SUGGERITO = 15m

### SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 7/4/1999

- $x = (0, 1, 0)$ ;  $u = (0, 1, 0)$ .
  - $x = (0, 1, 0)$  è l'unica soluzione ottimale in quanto facendo uscire di base  $u_1$  la variabile entrante è  $x_1$  che non modifica la soluzione corrente, avendo termine noto nullo.
  - Se il coefficiente di posto 1 - 1 è non negativo allora lo spigolo  $u_1 \geq 0, x_3 = 0; u_2 = 0$  è ottimale.
  - Se il coefficiente di posto 1 - 4 è positivo allora la regione ammissibile è limitata ed esistono altre soluzioni ottimali.
- No perché  $v(1) + v(2) > v(12)$ .
  - Sì, infatti  $v(1) + v(23) = v(2) + v(13) = v(3) + v(12) = v(N)$ .
  - Applicando la formula si ha  $\phi(v) = (-1/3, 8/3, 5/3)$ .

2d) No perché  $v(1) > \phi(1)$ .

### PROVA SCRITTA DEL 18/6/1999

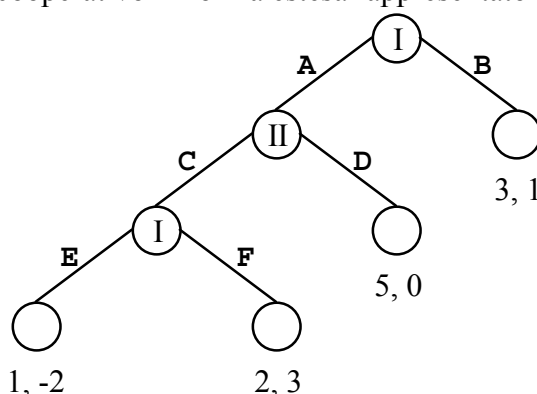
1) Sia dato il seguente problema lineare **P**:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ & x_1 - x_3 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Determinare tutte le soluzioni ottimali di **P**.

TEMPO SUGGERITO = 20m

2) Si consideri il gioco non cooperativo in forma estesa rappresentato dal seguente albero:



a) Scrivere il gioco in forma strategica.

b) Determinare tutti gli equilibri di Nash in strategie pure.

TEMPO SUGGERITO = 15m

### SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 18/6/1999

1) La tabella associata al problema è:

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |    |
|-------|-------|-------|-------|----|
| $u_1$ | 1     | -2    | 0     | 1  |
| $u_2$ | 1 *   | 0     | -1    | -1 |
| $-z$  | -1    | 2     | -3    | 0  |

|       | $u_2$ | $x_2$ | $x_3$ |    |
|-------|-------|-------|-------|----|
| $u_1$ | 1     | -2 *  | 1     | 2  |
| $x_1$ | 1     | 0     | 1     | 1  |
| $-z$  | -1    | 2     | -4    | -1 |

|       | $u_2$ | $u_1$ | $x_3$ |   |
|-------|-------|-------|-------|---|
| $x_2$ | 1/2   | -1/2  | 1/2   | 1 |
| $x_1$ | 1     | 0     | 1     | 1 |
| $-z$  | 0     | -1    | -3    | 1 |

Una soluzione ottimale è  $x = (1, 1, 0)$ ;  $z = -1$ .

Ulteriori soluzioni sono date dallo spigolo illimitato  $u_2 \geq 0$ ;  $u_1 = 0$ ;  $x_3 = 0$ , cioè:

$$x_1 \geq 1$$

$$x_2 = \frac{x_1 + 1}{2}$$

$$x_3 = 0$$

2a) La forma strategica può essere espressa in forma di tabella come segue:

| I \ II | C                   | D                   |
|--------|---------------------|---------------------|
| AE     | 1, -2               | <u>5</u> , <u>0</u> |
| BE     | <u>3</u> , <u>1</u> | 3, <u>1</u>         |
| AF     | 2, <u>3</u>         | <u>5</u> , 0        |
| BF     | <u>3</u> , <u>1</u> | 3, <u>1</u>         |

2b) Con riferimento alle "migliori risposte" evidenziate al punto precedente si determinano tre equilibri di Nash in strategie pure:

(AE, D), (BE, C), (BF, C)

### PROVA SCRITTA DEL 6/7/1999

1) Sia dato il seguente problema lineare **P**:

$$\min -2x_1 - 3x_2 - 7x_3$$

$$\text{s.t. } 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 6$$

$$3x_3 \leq 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- Risolvere **P** con l'algoritmo del simplesso, scegliendo la variabile uscente più a sinistra e la variabile entrante più in alto.
  - Determinare tutte le soluzioni ottimali.
  - Disegnare accuratamente la regione ammissibile evidenziando la regione ottimale.
- TEMPO SUGGERITO = 30m

2) Sia dato il seguente gioco cooperativo  $\langle N, v \rangle$ :

$$N = \{1, 2, 3\}$$

$$v(1) = 1; v(2) = 0; v(3) = 2; v(12) = 2; v(13) = 4; v(23) = 3; v(123) = 4$$

- Dimostrare che  $v$  è superadditivo.
  - Dimostrare che  $C(v)$  è vuoto.
- TEMPO SUGGERITO = 15m

3) Sia dato il seguente grafo valutato **G**:

$$\begin{array}{llll} v_1(v_2-2, v_6-1) & v_3(v_8-1) & v_5(v_3-3) & v_7(v_5-5) \\ v_2(v_3-2, v_4-3, v_5-1) & v_4(v_1-3, v_7-4) & v_6(v_7-4) & v_8(v_7-2) \end{array}$$

La notazione è: primo vertice(secondo vertice-lunghezza).

Determinare la lunghezza del cammino minimo da  $v_2$  a  $v_7$ , usando l'algoritmo di Dijkstra e analizzando vertici e archi in ordine crescente di indice.

TEMPO SUGGERITO = 15m

### SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 6/7/1999

1a) Applicando l'algoritmo richiesto si ha:

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |   |
|-------|-------|-------|-------|---|
| $u_1$ | -2 *  | -3    | -6    | 6 |
| $u_2$ | 0     | 0     | -3    | 2 |
| $-z$  | 2     | 3     | 7     | 0 |

|       | $u_1$ | $x_2$ | $x_3$ |   |
|-------|-------|-------|-------|---|
| $x_1$ | -1/2  | -3/2  | -3    | 3 |
| $u_2$ | 0     | 0     | -3 *  | 2 |
| -z    | -1    | 0     | 1     | 6 |

|       | $u_1$ | $x_2$ | $u_2$ |      |
|-------|-------|-------|-------|------|
| $x_1$ | -1/2  | -3/2  | 1     | 1    |
| $x_3$ | 0     | 0     | -1/3  | 2/3  |
| -z    | -1    | 0     | -1/3  | 20/3 |

La tabella è ottimale e una soluzione è  $x = (1, 0, 2/3)$ ,  $z = -20/3$ .

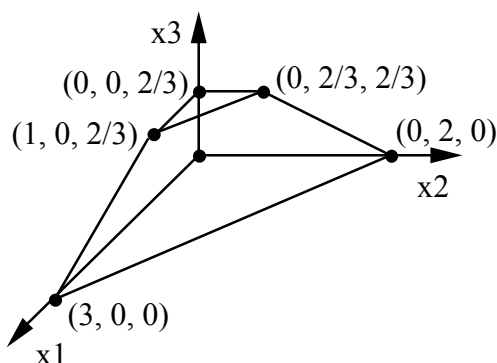
1b) Facendo cardine sul termine 1 - 2 si ha:

|       | $u_1$ | $x_1$ | $u_2$ |      |
|-------|-------|-------|-------|------|
| $x_2$ | -1/2  | -3/2  | 2/3   | 2/3  |
| $x_3$ | 0     | 0     | -1/3  | 2/3  |
| -z    | -1    | 0     | -1/3  | 20/3 |

La nuova soluzione ottimale è  $x' = (0, 2/3, 2/3)$ ,  $z = -20/3$ .

La regione ottimale è costituita dal segmento di estremi  $x$  e  $x'$ , in quanto non esistono altre tabelle ottimali.

1c)



2a) Basta applicare la definizione.

2b) Basta osservare che:

$$v(12) = 2 \Rightarrow x_1 + x_2 \geq 2$$

$$v(13) = 4 \Rightarrow x_1 + x_3 \geq 4$$

$$v(23) = 3 \Rightarrow x_2 + x_3 \geq 3$$

e quindi  $2(x_1 + x_2 + x_3) \geq 9$  da cui  $2 v(N) = 8 \geq 9$ .

3) Utilizzando il vertice  $v_2$  come vertice iniziale e terminando quando l'etichetta di  $v_7$  diventa esatta si ha:

| $v_2$ | $v_1$ | $v_3$    | $v_4$    | $v_5$    | $v_6$ | $v_7$    | $v_8$    | $h$ |
|-------|-------|----------|----------|----------|-------|----------|----------|-----|
| 0     | -     | 2        | 3        | <b>1</b> | -     | -        | -        | 5   |
| 0     | -     | <b>2</b> | 3        | <b>1</b> | -     | -        | -        | 3   |
| 0     | -     | <b>2</b> | <b>3</b> | <b>1</b> | -     | -        | 3        | 4   |
| 0     | 6     | <b>2</b> | <b>3</b> | <b>1</b> | -     | 7        | <b>3</b> | 8   |
| 0     | 6     | <b>2</b> | <b>3</b> | <b>1</b> | -     | <b>5</b> | <b>3</b> | 7   |

STOP

Il cammino da  $v_2$  a  $v_7$  ha lunghezza 5.

**PROVA SCRITTA DEL 8/9/1999**

- 1) Sia dato il seguente problema lineare
- P**
- :

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + x_2 + \frac{3}{2} x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 6 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- a) Risolvere **P** con l'algoritmo del simplesso, scegliendo la variabile uscente più a sinistra e la variabile entrante più in alto.  
 b) Determinare tutte le soluzioni ottimali.

TEMPO SUGGERITO = 25m

- 2) Sia dato il seguente gioco cooperativo
- $\langle N, v \rangle$
- :

$$\begin{aligned} N &= \{1, 2, 3\} \\ v(1) &= v(2) = v(12) = v(13) = 0 \\ v(3) &= v(23) = v(123) = 1 \end{aligned}$$

- a) Calcolare il valore di Shapley  $\phi(v)$ .  
 b) Dire se  $\phi(v) \in C(v)$ .  
 c) Dire se  $C(v)$  è vuoto, motivando la risposta.

TEMPO SUGGERITO = 20m

- 3) Dato un grafo
- G**
- connesso con
- $n$
- vertici ed
- $m$
- archi, quanti archi è necessario eliminare per essere certi di perdere la connessione (giustificare la risposta)?

TEMPO SUGGERITO = 10m

**SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 8/9/1999**

- 1a) Applicando l'algoritmo richiesto si ha:

| T0    | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |    |
|-------|-------|-------|-------|----|
| $u_1$ | -2 *  | -2    | -3    | 6  |
| $u_2$ | 1     | 1     | 1     | -1 |
| $z$   | 1     | 1     | 3/2   | 0  |

| T1    | $u_1$ | $x_2$ | $x_3$ |   |
|-------|-------|-------|-------|---|
| $x_1$ | -1/2  | -1    | -3/2  | 3 |
| $u_2$ | -1/2  | 0     | -1/2  | 2 |
| $z$   | -1/2  | 0     | 0     | 3 |

La tabella è ottimale e una soluzione è  $x = (1, 0, 0)$ ,  $z^* = 3$ .

- 1b) La tabella presenta due coefficienti di
- $z$
- nulli.

Facendo cardine sul termine 1 - 2 di T1 si ha:

| T2    | $u_1$ | $x_1$ | $x_3$ |   |
|-------|-------|-------|-------|---|
| $x_2$ | -1/2  | -1    | -3/2  | 3 |
| $u_2$ | -1/2  | 0     | -1/2  | 2 |
| $-z$  | -1/2  | 0     | 0     | 3 |

La nuova soluzione ottimale è  $x' = (0, 3, 0)$ .

Facendo cardine sul termine 1 - 2 di T2 si torna a T1.

Facendo cardine sul termine 1 - 3 di T2 si ha:

|       |       |       |       |   |
|-------|-------|-------|-------|---|
| T3    | $u_1$ | $x_1$ | $x_2$ |   |
| $x_3$ | -1/3  | -2/3  | -2/3  | 2 |
| $u_2$ | -1/2  | 0     | -1/2  | 1 |
| -z    | -1/2  | 0     | 0     | 3 |

La nuova soluzione ottimale è  $x'' = (0, 0, 2)$ .

Facendo cardine sul termine 1 - 2 di T3 si torna a T1.

Facendo cardine sul termine 1 - 3 di T3 si torna a T2.

La regione ottimale è costituita dal triangolo di estremi  $x$ ,  $x'$  e  $x''$ , in quanto non esistono altre tabelle ottimali.

2a) Applicando la procedura si ha  $\varphi(v) = \left(-\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{5}{6}\right)$ .

2b) No; ad esempio  $\varphi_1(v) < v(1)$ .

2c) No; ad esempio  $x = (0, 0, 1) \in C(v)$  e può essere ricavata come segue:

$$v(N) = v(3) = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 \leq 0$$

$$v(1) = v(2) = 0 \Rightarrow x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{e quindi } x_1 = x_2 = 0.$$

3) Un albero di ordine  $n$  ha  $n - 1$  archi, quindi se rimangono  $n - 2$  archi si ha certamente un grafo non connesso. Pertanto bisogna togliere  $m - (n - 2)$  archi, cioè  $m - n + 2$ .

### PROVA SCRITTA DI RICERCA OPERATIVA DEL 22/9/1999 N.O.

1) Sia dato il seguente problema lineare **P**:

$$\max \quad z = -x_2 + 2x_3$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 \geq 1$$

$$-x_2 + x_3 \leq 2$$

$$2x_1 - x_2 - x_3 \leq 0$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

a) Risolvere **P** con l'algoritmo del simplesso, scegliendo la variabile entrante più a sinistra e la variabile uscente più in alto.

b) **P** ammette una sola soluzione ottimale? (Giustificare brevemente la risposta).

TEMPO SUGGERITO = 25m

2) Sia dato il seguente gioco a tre giocatori I, II, III:

Iniziano i giocatori I e II che contemporaneamente scelgono entrambi tra due possibili mosse A e B.

Se le scelte sono differenti il gioco termina e i due giocatori vincono 2 ciascuno mentre il giocatore III non vince nulla.

Se entrambi i giocatori I e II hanno scelto A il giocatore III deve scegliere tra le mosse X, Y, Z e il gioco termina con payoff rispettivamente  $(-1, -1, 1)$  se sceglie X,  $(0, 3, 1)$  se sceglie Y e  $(3, 0, 1)$  se sceglie Z.

Se entrambi i giocatori I e II hanno scelto B il giocatore III deve scegliere tra le mosse M, N e il gioco termina con payoff rispettivamente  $(-2, -2, 4)$  se sceglie M,  $(0, 0, 0)$  se sceglie N.

Scrivere il gioco in forma estesa.

TEMPO SUGGERITO = 20m

### SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA DEL 22/9/1999

1a) Applicando l'algoritmo richiesto si ha:

|    | x1  | x2 | x3 |    |
|----|-----|----|----|----|
| u1 | 1 * | 1  | 0  | -1 |
| u2 | 0   | 1  | -1 | 2  |
| u3 | -2  | 0  | -1 | 4  |
| z  | 0   | -3 | 2  | 0  |

|    | u1 | x2 | x3 |     |
|----|----|----|----|-----|
| x1 | 1  | -1 | 0  | 1   |
| u2 | 0  | 1  | -1 | 2 * |
| u3 | -2 | 2  | -1 | 2   |
| z  | 0  | -3 | 2  | 0   |

|    | u1 | x2 | u2 |   |
|----|----|----|----|---|
| x1 | 1  | -1 | 0  | 1 |
| x3 | 0  | 1  | -1 | 2 |
| u3 | -2 | 1  | 1  | 0 |
| z  | 0  | -1 | -2 | 4 |

La tabella è ottimale e la soluzione è  $x^* = (1, 0, 2)$ ,  $z^* = 4$ .

1b) Il termine nullo nella riga di z può far pensare ad ulteriori soluzioni ottimali, però la scelta del cardine seleziona l'elemento di posto 3 - 1 che ha il termine noto nullo. Questa osservazione non permette di concludere nulla sull'esistenza di ulteriori soluzioni ottimali. Facendo cardine si ha:

|    | u3   | x2   | u2  |   |
|----|------|------|-----|---|
| x1 | -1/2 | -1/2 | 1/2 | 1 |
| x3 | 0    | 1    | -1  | 2 |
| u1 | -1/2 | 1/2  | 1/2 | 0 |
| z  | 0    | -1   | -2  | 4 |

La tabella rappresenta lo stesso vertice e un termine di z è nullo, ma si può osservare che facendo cardine sull'elemento di posto 3 - 1 si torna alla tabella precedente e quindi non esistono ulteriori soluzioni ottimali.

2) Utilizzando una rappresentazione ad albero si ha:

