TEORIA DEI GIOCHI

1) Si consideri il seguente problema della battaglia dei sessi:

I \ II	T	P
T	2, 1	0, 0
P	0, 0	1, 2

Calcolare l'utilità attesa di I e II nel caso in cui giochino le seguenti strategie miste:

A - I : $\frac{1}{3}$ T $\oplus$ $\frac{2}{3}$ P   II : $\frac{1}{2}$ T $\oplus$ $\frac{1}{2}$ P

B - I : $\frac{1}{4}$ T $\oplus$ $\frac{3}{4}$ P   II : $\frac{2}{3}$ T $\oplus$ $\frac{1}{3}$ P

C - I : $\frac{1}{2}$ T $\oplus$ $\frac{1}{2}$ P   II : $\frac{1}{3}$ T $\oplus$ $\frac{2}{3}$ P

2) Determinare gli equilibri di Nash in strategie pure, se esistono, per i seguenti giochi a due giocatori a somma zero:

A - $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

B - $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

C - $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 5 & 7 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

D - $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

3) Determinare il valore del gioco e l'equilibrio di Nash in strategie miste per i seguenti giochi a due giocatori a somma zero, applicando, se è possibile, la riduzione per dominanza:

A - $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

B - $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

C - $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

4) Dati i seguenti giochi cooperativi a utilità trasferibile, di cui è data la funzione caratteristica, determinare un'imputazione del nucleo se non è vuoto oppure giustificare perchè è vuoto:

A - $$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{se } S = \{1\}, \{2\}, \{3\} \\ 4/5 & \text{se } S = \{1, 2\} \\ 3/5 & \text{se } S = \{1, 3\} \\ 2/5 & \text{se } S = \{2, 3\} \\ 1 & \text{se } S = \{1, 2, 3\} \end{cases}$$

B - $$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{se } S = \{1\}, \{2\}, \{3\} \\ 1 & \text{se } S = \{1, 2\}, \{1, 3\} \\ 2 & \text{se } S = \{2, 3\} \\ 3 & \text{se } S = \{1, 2, 3\} \end{cases}$$

C - $$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{se } S = \{2\}, \{3\} \\ 2 & \text{se } S = \{1\} \\ 3 & \text{se } S = \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\} \\ 4 & \text{se } S = \{1, 2, 3\} \end{cases}$$

D - $$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{se } S = \{1\}, \{2\} \\ 1 & \text{se } S = \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\} \\ 2 & \text{se } S = \{1, 2\}, \{1, 2, 3\} \end{cases}$$

E - $$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{se } S = \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\} \\ 1 & \text{se } S = \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} \end{cases}$$

5) Determinare il valore di Shapley per i giochi dell'esercizio precedente.

6) Calcolare gli indici di Banzhaf-Coleman (normalizzato e no) per i seguenti giochi di maggioranza di cui sono riportate le coalizioni vincenti:
A - {1}, {1, 2}, {1, 3}, {1, 2, 3} (1 è un giocatore di veto).
B - {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}.
C - {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}.
D - {4}, {1, 4}, {2, 4}, {3, 4}, {1, 2, 4}, {1, 3, 4}, {2, 3, 4}, {1, 2, 3, 4} (4 è un giocatore di veto).
E - {1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 3, 4}, {2, 3, 4}, {1, 2, 3, 4}.

7) Determinare l'allocazione di costi per i seguenti cost game utilizzando il valore di Shapley, EC, ACA, CG:
A - $c(1) = c(2) = c(3) = 5$; $c(12) = c(13) = 8$; $c(23) = 9$; $c(N) = 12$.
B - $c(1) = 15$; $c(2) = 18$; $c(3) = 20$; $c(12) = 30$; $c(13) = 28$; $c(23) = 35$; $c(N) = 40$.
C - $c(1) = 3$; $c(2) = 3$; $c(3) = 2$; $c(4) = 4$; $c(12) = 5$; $c(13) = 5$; $c(14) = 6$; $c(23) = 4$; $c(24) = 6$; $c(34) = 5$; $c(123) = 6$; $c(124) = 8$; $c(134) = 7$; $c(234) = 8$; $c(N) = 9$.

SOLUZIONI

1) A - $u_I = \frac{2}{3}$ $u_{II} = \frac{5}{6}$

B - $u_I = \frac{7}{12}$ $u_{II} = \frac{2}{3}$

C - $u_I = \frac{2}{3}$ $u_{II} = \frac{5}{6}$

2) A - La strategia (2, 3) è di equilibrio.
B - Non esistono strategie di equilibrio.
C - La strategia (3, 3) è di equilibrio.
D - Le strategie (1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3) sono di equilibrio.

3) A - $I : \frac{1}{2}\ x_1 \oplus \frac{1}{2}\ x_2 \oplus 0\ x_3$ $II : 0\ y_1 \oplus \frac{5}{8}\ y_2 \oplus \frac{3}{8}\ y_3 \oplus 0\ y_4$

Valore del gioco $= \frac{3}{2}$.

B - $I : 0\ x_1 \oplus 0\ x_2 \oplus 1\ x_3 \oplus 0\ x_4$ $II : 0\ y_1 \oplus \frac{1}{2}\ y_2 \oplus \frac{1}{2}\ y_3 \oplus 0\ y_4$

Valore del gioco = 2.

C - $I : \frac{1}{2}\ x_1 \oplus \frac{1}{2}\ x_2 \oplus 0\ x_3 \oplus 0\ x_4$ $II : 0\ y_1 \oplus \frac{1}{2}\ y_2 \oplus 0\ y_3 \oplus \frac{1}{2}\ y_4 \oplus 0\ y_5$

Valore del gioco $= -\frac{1}{2}$.

4) A - $x = \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right) \in C(v)$
B - $x = (1, 1, 1) \in C(v)$
C - $C(v) = \emptyset$
D - $C(v) = \emptyset$
E - $x = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in C(v)$

5) A - $\varphi = \left(\frac{13}{30}, \frac{10}{30}, \frac{7}{30}\right)$
B - $\varphi = \left(\frac{4}{6}, \frac{7}{6}, \frac{7}{6}\right)$
C - $\varphi = (2, 1, 1)$
D - $\varphi = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$
E - $\varphi = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

6) A - $\beta = \psi = (1, 0, 0)$
B - $\beta = (0.2, 0.2, 0.6)$; $\psi = (0.25, 0.25, 0.75)$
C - $\beta = \psi = (0.0, 0.5, 0.5)$
D - $\beta = \psi = (0, 0, 0, 1)$
E - $\beta = (0.25, 0.25, 0.25, 0.25)$; $\psi = (0.375, 0.375, 0.375, 0.375)$

7) A - φ = (3.667, 4.167, 4.167)
EC = (3.333, 4.333, 4.333)
ACA = (3.50, 4.25, 4.25)
CG = (3.333, 4.333, 4.333)

B - φ = (10, 15, 15)
EC = (9.333, 16.333, 14.333)
ACA = (10, 15, 15)
CG = (10, 15, 15)

C - φ = (2.083, 2.250, 1.417, 3.250)
EC = (1.5, 2.5, 1.5, 3.5)
ACA = (1.8, 2.4, 1.4, 3.4)
CG = (1.8, 2.4, 1.4, 3.4)