PROGRAMMAZIONE LINEARE E DUALITA'

1) Dati i punti di $\mathbf{R}^2$ (1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 5), (4, 1), (4, 2), (5, 5), (6, 2), (6, 5).
Determinare graficamente:
A - L'involucro convesso di tali punti.
B - Quali punti possono essere esclusi dall'involucro convesso senza perdere la convessità.

2) Dati i punti di $\mathbf{R}^2$ (0, 0), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 4), (2, 5), (3, 1), (4, 5), (5, 2), (6, 5).
Determinare graficamente:
A - L'involucro convesso di tali punti.
B - Quali punti possono essere omessi per generare l'involucro convesso.

3) Cosa cambia in un programma lineare se i vincoli sono di disuguaglianza stretta?

4) Dati i due semispazi $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{a}_1^T\mathbf{x} \le \mathbf{c}_1\}$ e $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{a}_2^T\mathbf{x} \le \mathbf{c}_2\}$, dimostrare che la loro intersezione è convessa.

5) Trovare il rango delle seguenti matrici usando il metodo del cardine:

A -
$$\begin{matrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{matrix}$$

B -
$$\begin{matrix} 3 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 6 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 6 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 8 & 4 & -5 \end{matrix}$$

6) Trovare il rango ed eventualmente l'inversa (se esiste) delle seguenti matrici usando il metodo del cardine:

A -
$$\begin{matrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{matrix}$$

B -
$$\begin{matrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{matrix}$$

C -
$$\begin{matrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & -4 & 1 \end{matrix}$$

D -
$$\begin{matrix} 4 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{matrix}$$

E -
$$\begin{matrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{matrix}$$

F -
$$\begin{matrix} -2 & 1 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{matrix}$$

7) Verificare che il metodo del cardine permette di esprimere un vettore **b** espresso in funzione della base canonica in funzione di una qualsiasi base di $\mathbf{R}^n$ $\mathbf{a}_i$, i = 1, …, n.
Applicare il metodo nei seguenti casi:
A - $\mathbf{b}$ = (-1, 1, 4) $\mathbf{a}_1$ = (3, 1, 2) $\mathbf{a}_2$ = (1, 3, 9) $\mathbf{a}_3$ = (3, 2, 5).
B - $\mathbf{b}$ = (-1, 3, 5) $\mathbf{a}_1$ = (-2, 0, 1) $\mathbf{a}_2$ = (3, 1, 1) $\mathbf{a}_3$ = (1, -3, 2).
C - $\mathbf{b}$ = (2, -2, 3, 4) $\mathbf{a}_1$ = (3, 1, 0, 1) $\mathbf{a}_2$ = (2, 1, 0, 1) $\mathbf{a}_3$ = (1, -1, 1, 0) $\mathbf{a}_4$ = (0, 1, 1, -1).

8) Verificare che non è possibile esprimere il vettore **b** = (3, 3, 3) in funzione dei vettori:
$\mathbf{a}_1$ = (1, 3, 2), $\mathbf{a}_2$ = (2, 1, 1), $\mathbf{a}_3$ = (5, 0, 1)
e giustificare la risposta.

9) Dati i vettori di $\mathbf{R}^4$ **u**, **v**, **w** determinare se sono linearmente indipendenti usando il metodo del cardine e completare una base di $\mathbf{R}^4$.

A - $\mathbf{u} = (2, 0, -1, 3)$ $\mathbf{v} = (3, 1, 0, -1)$ $\mathbf{w} = (-1, 0, 1, -2)$
B - $\mathbf{u} = (1, 3, 0, 4)$ $\mathbf{v} = (2, 0, 3, 1)$ $\mathbf{w} = (0, 1, 0, 1)$
C - $\mathbf{u} = (2, 1, -1, 0)$ $\mathbf{v} = (0, 2, -1, 1)$ $\mathbf{w} = (-2, 3, -1, 2)$

10) Dato il triangolo di vertici **A**(0, 0), **B**(2, 0), **C**(1, 1), esprimere il punto **P**(1/2, 1/2) come combinazione lineare convessa dei vertici.

11) Costruire esempi di programmi lineari aventi insieme ammissibile vuoto, una sola soluzione ottimale, infinite soluzioni ottimali, funzione obiettivo superiormente illimitata.

12) Dare un esempio di programma lineare **P** in cui la regione ammissibile è un troncone di cui i punti **A**(8, 3) e **B**(3, 1) sono vertici e inoltre:
A - Il massimo vale -2/3.
B - La funzione obiettivo è superiormente illimitata.

13) Costruire un programma lineare **P** tale che **A**(3, 3, 1) sia un vertice ammissibile degenere e non sia possibile in una sola iterazione determinare alcun vertice adiacente ad **A**.

14) Costruire esempi di programmi lineari in cui:
A - Il primale e il duale hanno entrambi insieme ammissibile vuoto.
B - Il primale ha regione ammissibile vuota e il duale ha la funzione obiettivo superiormente illimitata.

15) Costruire un programma lineare **P** che abbia come vertice ammissibile il punto **A**(1, 0, 1) e come supporto di uno spigolo la retta:
$$3\,\mathbf{x}_1 + 3\,\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 = 5$$
$$-3\,\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + 3\,\mathbf{x}_3 = 3$$

16) Costruire un programma lineare **P** con 3 variabili e 4 vincoli in cui il vertice non degenere **A**(3, 3, 1) è origine dei 2 spigoli illimitati $\mathbf{s}_1$: $\{\mathbf{u}_1 = 0, \mathbf{u}_2 = 0\}$, $\mathbf{s}_2$: $\{\mathbf{u}_2 = 0, \mathbf{u}_3 = 0\}$ e tale che la funzione obiettivo assuma solo valori finiti su $\mathbf{s}_1$ e sia superiormente illimitata su $\mathbf{s}_2$.

17) Mostrare su un esempio grafico in due dimensioni che la scelta della direzione di massimo incremento della funzione obiettivo non è necessariamente la più efficiente.

18) Verificare con un esempio che se il primale ha una sola soluzione ottimale non degenere, allora il duale ha una sola soluzione ottimale e dedurre il motivo.

19) In un programma lineare in $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ con **m** vincoli quanti possono essere al più i vertici adiacenti ad un vertice? In quali casi il numero di vertici adiacenti è minore di quello massimo?

20) Sia dato un programma lineare per il quale l'origine è l'unica soluzione ottimale. Si può affermare che i coefficienti della funzione obiettivo sono tutti strettamente negativi?

21) Perchè nell'algoritmo primale del simplesso ogni variabile che entra in base non può uscire all'iterazione successiva?

22) Nell'algoritmo primale del simplesso in quali condizioni una variabile uscita dalla base può entrare all'iterazione successiva? E in quali non può?

23) Sia dato il programma lineare **P**:

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \ge 0 \end{aligned}$$

Sia $\mathbf{x}^*$ una soluzione ottimale. Si sostituisca il vettore **c** col vettore $\mathbf{c}+\mathbf{d}$ e sia $\mathbf{x}^*+\mathbf{y}^*$ una nuova soluzione ottimale.
Dimostrare che $\mathbf{d}^T\mathbf{y}^* \ge 0$ (nessuna ipotesi è fatta su **A**, **b**, **c**, **d**).

24) Sia dato il programma non lineare **P**:

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & |\,\mathbf{a}_i^T\mathbf{x}\,| \le \mathbf{b}_i \qquad \mathbf{b}_i \ge 0 \qquad i=1, \dots, m \\ & \mathbf{x} \ge 0 \end{aligned}$$

Ricondurlo ad un programma lineare in forma canonica e trovarne il duale.

25) Sia dato il programma lineare **P**:

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b} \end{aligned}$$

Ricondurlo ad un programma lineare in forma canonica:
A - Raddoppiando il numero delle variabili
B - Aggiungendo una sola variabile. Come è definita questa variabile?

26) Sia dato il programma non lineare **P**:

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}_1\,|\,\mathbf{x}_1\,| + \mathbf{c}_2\,|\,\mathbf{x}_2\,| + \dots + \mathbf{c}_n\,|\,\mathbf{x}_n\,| \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b} \end{aligned}$$

Ricondurlo ad un programma lineare in forma canonica.

27) Sia dato il programma non lineare **P**:

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \ge 0 \end{aligned}$$

dove $\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \max\,\{\mathbf{c}_1{}^T\mathbf{x} + \mathbf{d}_1, \mathbf{c}_2{}^T\mathbf{x} + \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{c}_n{}^T\mathbf{x} + \mathbf{d}_n\}$
Come può essere risolto coi metodi della programmazione lineare?

28) Sia dato il programma non lineare **P**:

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \ge 0 \end{aligned}$$

dove $\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \min\,\{\mathbf{c}_1{}^T\mathbf{x} + \mathbf{d}_1, \mathbf{c}_2{}^T\mathbf{x} + \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{c}_n{}^T\mathbf{x} + \mathbf{d}_n\}$
Ricondurlo ad un programma lineare in forma canonica.

N.B. Nei seguenti esercizi vengono utilizzate, salvo diversa indicazione, le seguenti notazioni:

- $\mathbf{S_a}$ insieme delle soluzioni ammissibili del problema primale
- $\mathbf{S_{ott}}$ insieme delle soluzioni ottimali del problema primale
- **z** funzione obiettivo da massimizzare del problema primale
- **w** funzione obiettivo da minimizzare del problema duale

29) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un programma lineare **P**:
A - Se **A** è un punto ammissibile, la tabella associata ad **A** ha tutti i termini noti non negativi.
B - Se $\mathbf{S_a}$ è vuota, allora ogni tabella ha almeno un termine noto negativo.
C - Se **z** è superiormente illimitata, una generica tabella ha una colonna, esclusa quella dei termini noti, con tutti i termini non negativi.
D - Se **z** è superiormente illimitata, un'unica tabella ha una colonna, esclusa quella dei termini noti, con tutti i termini non negativi e il coefficiente di **z** in quella colonna positivo.

30) Verificare che, dette $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}^T\mathbf{w}$ le funzioni obiettivo da massimizzare e da minimizzare del problema primale e del problema duale, si ha:
A - Il problema duale del problema duale coincide con il problema primale dato.
B - Se $\mathbf{x}°$ e $\mathbf{w}°$ sono soluzioni ammissibili rispettivamente del problema primale e del problema duale, allora vale $\mathbf{c}^T\mathbf{x}° \leq \mathbf{b}^T\mathbf{w}°$.
C - Se $\mathbf{x}^*$ e $\mathbf{w}^*$ sono soluzioni ammissibili rispettivamente del problema primale e del problema duale, per cui vale $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T\mathbf{w}^*$, allora $\mathbf{x}^*$ e $\mathbf{w}^*$ sono rispettivamente soluzioni ottimali del primale e del duale.

31) Sia dato un programma lineare **P** con un vertice **A** degenere; è vero che:
A - Ogni tabella associata ad **A** ha almeno un termine noto nullo.
B - Il numero dei termini noti nulli è uguale per tutte le tabelle.

32) Sia dato il programma lineare **P**:

$$\begin{array}{ll} \max & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{s.t.} & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{array}$$

Sia $\mathbf{x}^*$ una soluzione ottimale.
A - Se si sostituisce il vettore **c** col vettore $\lambda\mathbf{c}$, $\lambda > 0$, $\mathbf{x}^*$ rimane soluzione ottimale?
B - Se si sostituisce il vettore **c** col vettore $\mathbf{c}_\lambda$, dove $\mathbf{c}_{\lambda i} = \mathbf{c}_i + \lambda$, $\lambda \neq 0$, $\mathbf{x}^*$ rimane soluzione ottimale?

33) Sia dato un programma lineare **P** avente una sola soluzione ottimale e sia **P'** il programma lineare ottenuto cambiando i termini noti dei vincoli; quali dei seguenti casi possono presentarsi:
A - $\mathbf{S_a}$ di **P'** è vuoto.
B - $\mathbf{S_a}$ di **P'** è un poliedro convesso.
C - $\mathbf{S_a}$ di **P'** è un troncone.
D - **P'** ha una sola soluzione ottimale.
E - **P'** ha infinite soluzioni ottimali.
F - **z** di **P'** è superiormente illimitata.

34) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un programma lineare **P**:
A - Se **A** è un vertice ottimale, il valore di **z** è strettamente minore in almeno un vertice adiacente ad **A** (supponendo che ve ne siano), rispetto al valore **z**(**A**).
B - Se $\mathbf{S_{ott}}$ è vuoto, allora $\mathbf{S_a}$ è illimitato (cioè è un troncone).
C - Se $\mathbf{S_a}$ contiene un solo vertice, questo è ottimale.
D - Se $\mathbf{S_a}$ è non vuoto e limitato (cioè è un poliedro), **P** ammette almeno una soluzione

ottimale.

35) Sia dato un programma lineare **P** e sia **A** un punto della frontiera di $\mathbf{S_{ott}}$, ma non un vertice di $\mathbf{S_a}$ e sia data la funzione obiettivo $\mathbf{z} = \sum_i \mathbf{x}_i$

A - Quali dei seguenti casi non possono presentarsi:

$\mathbf{S_a}$ è vuoto	$\mathbf{S_{ott}}$ è vuoto
$\mathbf{S_a}$ è un punto	$\mathbf{S_{ott}}$ è un punto
$\mathbf{S_a}$ è un poliedro convesso	$\mathbf{S_{ott}}$ è un poliedro convesso
$\mathbf{S_a}$ è un troncone	$\mathbf{S_{ott}}$ è un troncone

B - Cambiando la **z**, è possibile che cambino le risposte alle precedenti domande?

36) Sia dato un programma lineare $\mathbf{P}^1$; sia $\mathbf{P}^i$ il duale di $\mathbf{P}^{i-1}$ ($i \geq 2$). Siano $\mathbf{S}^k_{\mathbf{a}}$ e $\mathbf{S}^k_{\mathbf{ott}}$ gli insiemi delle soluzioni ammissibili e ottimali di $\mathbf{P}^k$ ($k \geq 1$).

A - Se $\mathbf{S}^k_{\mathbf{ott}} \neq \emptyset$ può esistere un indice **h** per cui $\mathbf{S}^h_{\mathbf{ott}} \neq \emptyset$?

B - Se $\mathbf{S}^k_{\mathbf{a}} = \emptyset$ può esistere un indice **h** per cui $\mathbf{S}^h_{\mathbf{ott}} \neq \emptyset$?

37) Sia dato il seguente teorema:
Se $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{y}_0$ sono soluzioni ammissibili per i programmi lineari **P** e **P*** tra loro duali, la relazione $\mathbf{z}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{w}(\mathbf{y}_0)$ vale se e solo se $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{y}_0$ sono soluzioni ottimali per **P** e **P***

A - Dimostrare il teorema.

B - Data la seguente tabella, relativa ai vertici **V**(0, 2, 0) e **V***(0, 0, 3) dei programmi lineari **P** e **P*** tra loro duali:

	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{u}_3$	$\mathbf{x}_3$	
$\mathbf{x}_2$	-3	1	-3	2
$\mathbf{u}_1$	2	-1	1	-1
$\mathbf{u}_2$	2	-1	-1	1
$\mathbf{z}$	-4	-3	-3	4

Poichè **z**(**V**) = **w**(**V***) = 4 si può concludere che **V** e **V*** sono ottimali in base al teorema precedente?

38) Siano date le seguenti tabelle relative a due distinti programmi lineari:

	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{x}_1$	
$\mathbf{x}_2$	-1	2	3	1
$\mathbf{x}_3$	2	3	4	1
$\mathbf{v}_2$	1	-1	-2	0
$\mathbf{z}$	4	-5	-3	3

	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{x}_1$	
$\mathbf{x}_2$	1	2	3	1
$\mathbf{x}_3$	2	3	4	1
$\mathbf{v}_2$	1	-1	-2	4
$\mathbf{z}$	-1	-5	-3	3

Sapendo che $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ rappresentano vincoli di uguaglianza dire se le tabelle sono ottimali.

39) Sia dato il seguente programma lineare **P**:

	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	
$\mathbf{u}_1$	3	-3	4	-4
$\mathbf{u}_2$	-1	2	2	-3
$\mathbf{u}_3$	4	-5	2	-1
$\mathbf{z}$	-1	-1	-1	0

A - Il punto **A**(1, 1, 1) è una soluzione ammissibile? E' un vertice?
B - $\mathbf{S_a}$ può essere un poliedro convesso?
C - Senza risolvere **P** si può dire che $\mathbf{S_{ott}}$ non è vuoto?

40) Sia dato il seguente programma lineare **P**:

$$\begin{array}{ll} \max & 4\,\mathbf{x}_1 + \mathbf{k}\,\mathbf{x}_2 + 5\,\mathbf{x}_3 \\ \text{s.t.} & 2\,\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + 3\,\mathbf{x}_3 \le 5 \\ & \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 \le 2 \\ & \mathbf{x}_1 + 2\,\mathbf{x}_2 \le 1 \\ & 3\,\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 \ge 2 \\ & \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \ge 0 \end{array}$$

A - Il punto **A**(1, 0, 1) è un vertice di $\mathbf{S_a}$?
B - Per quali valori di **k** il punto **A** risulta ottimale?
C - Per quali valori di **k** il punto **A** non è l'unica soluzione ottimale?
D - Se **A** risulta ottimale determinare l'insieme delle soluzioni ottimali del problema duale **P***.

41) Sia dato il seguente programma lineare **P**:

	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{x}_3$	
$\mathbf{x}_2$	0	-1	1	2
$\mathbf{u}_2$	α+1	-1	α-1	α
$\mathbf{u}_3$	-1	-2	2	1
z	-1	-2	2α-2	4

La tabella rappresenta il vertice primale **V**(0, 2, 0) e il vertice duale **W**(2, 0, 0).
A - Per quali valori di α si verifica:
V e **W** sono ammissibili? **V** e **W** sono degeneri? **V** e **W** sono ottimali? **V** e **W** non sono le uniche soluzioni ottimali? **V** e **W** coincidono?
B - Determinare come è fatto $\mathbf{S_a}$ per i seguenti valori di α:
$\alpha > 1$; $\alpha = 1$; $\alpha < -1$; $\alpha = -1$

42) Sia dato il seguente programma lineare **P**:

	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{x}_2$	
$\mathbf{u}_2$	2	-1	1	1
$\mathbf{u}_3$	1	-1	-1	0
$\mathbf{x}_3$	-2	2	1	2
z	-3	-2	1	4

Qual'è il vertice primale **A** corrispondente alla tabella data? E' un punto di massimo?

43) Sia dato il seguente programma lineare **P**:

	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	
$\mathbf{u}_1$	4	-1	-1	4
$\mathbf{u}_2$	3	1	-2	9
$\mathbf{u}_3$	2	0	-1	3
z	-8	1	1	0

A - **V**(1, 3, 5) e **V***(1, 0, 0) sono soluzioni ammissibili per il primale e per il duale?
B - Sono vertici?
C - Sono degeneri?
D - Il programma ha soluzioni ottimali? Se si, ordinare i numeri **z(V)**, **w(V*)**, $\mathbf{z_{ott}}$, $\mathbf{w_{ott}}$.

44) Sia dato il seguente programma lineare **P**:

	x_1	x_2	x_3	
u_1	3	-4	6	2
u_2	-2	12	-5	-1
u_3	4	2	4	-12
z	-3	-1	-2	0

A(1, 2, 1) è soluzione ammissibile del primale? E' un vertice? **P** ha soluzioni ottimali? Dimostrare che **z** è strettamente negativa su tutto $\mathbf{S_a}$.

45) Siano dati un programma lineare **P** e il suo duale **P***; siano **A**(4, 3, 3) e **A***(1, 1, 5, 0) due vertici ammissibili del primale e del duale rispettivamente.
A - Quanti vincoli hanno **P** e **P***?
B - **P** e **P*** hanno soluzioni ottimali?
C - Sia **z(A)** = 5; è possibile costruire una tabella che rappresenta contemporaneamente i vertici **A** e **A***? Se si, quanto vale **w(A*)**?

46) Sia dato il seguente programma lineare **P**:

	x_1	u_1	u_2	
x_2	1	-1	-1	4
x_3	-3	3	-1	1
u_3	-1	5	2	2
u_4	5	6	6	3
z	3	-1	-1	2

Trovare tutti i vertici ammissibili adiacenti a quello rappresentato in tabella?

47) Sia dato il seguente programma lineare **P**:

	u_4	x_2	u_2	
u_1	2	-1	4	3
u_3	3	2	-1	0
x_3	3	-1	0	1
x_1	4	3	-9	1
z	5	1	-3	2

Determinare tra i vertici ammissibili adiacenti a quello rappresentato dalla tabella quello situato a distanza massima da quest'ultimo. Il programma ha soluzioni ottimali?

48) Sia dato il programma lineare **P**:

min $\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}$

s.t. $2\,\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} \geq 4$

$\mathbf{x_1} + 7\,\mathbf{x_2} \geq 7$

$\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \geq 0$

Risolverlo con l'algoritmo primale e con l'algoritmo duale del simplesso, verificando lo spostamento della soluzione corrente.

49) Sia dato il seguente programma lineare **P**:

$$\begin{array}{ll} \max & 3\,\mathbf{x}_1 + 2\,\mathbf{x}_2 - 5\,\mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4 \\ \text{s.t.} & 3\,\mathbf{x}_1 - 2\,\mathbf{x}_2 + 2\,\mathbf{x}_3 - 4\,\mathbf{x}_4 \le 5 \\ & -\,\mathbf{x}_1 - 3\,\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + 2\,\mathbf{x}_4 \le 0 \\ & \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4 \ge 9 \\ & \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 \ge 0 \end{array}$$

A - Dimostrare che il punto **A**(1, 2, 5, 1) appartiene ad uno spigolo **s** di $\mathbf{S_a}$ ma non è un vertice.

B - Lo spigolo **s** è illimitato?

C - E' possibile modificare **P** aggiungendo un vincolo in modo che il nuovo programma **P'** ammetta sicuramente soluzioni ottimali?

50) Sia data la seguente tabella:

	$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	
$\mathbf{x}_2$	3	1	3	-6	4
$\mathbf{x}_1$	2	1	1	-5	5
$\mathbf{u}_3$	3	1	0	0	0
$\mathbf{u}_4$	7	2	8	-14	9
z	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**

dove **a**, **b**, **c**, **d**, **e** sono numeri reali qualsiasi.

A - Il programma lineare associato alla tabella data presenta il caso normale?

B - Determinare come è fatto $\mathbf{S_a}$?

C - Se **a** = **b** = **c** = **d** = **e** = 1, a quale risultato si perviene col metodo del simplesso?

D - Il punto **A**(1, 1, 1, 1) è una soluzione ammissibile? E' un vertice? Se si aggiunge il vincolo $2\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + 3\mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4 - 7 \ge 0$ il punto **A** è ammissibile? E' un vertice?

51) Trovare il problema duale e risolvere i seguenti programmi lineari:

A -
$$\begin{array}{ll} \max & \mathbf{x}_2 + 3\,\mathbf{x}_3 \\ \text{s.t.} & \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + 2\,\mathbf{x}_3 \le 2 \\ & 3\,\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = 1 \\ & \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 \le 10 \\ & \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \ge 0 \end{array}$$

B -
$$\begin{array}{ll} \max & \mathbf{x}_1 - 2\,\mathbf{x}_2 + 3\,\mathbf{x}_3 \\ \text{s.t.} & \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 \le 7 \\ & \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 \le -2 \\ & 3\,\mathbf{x}_1 + 2\,\mathbf{x}_3 \ge 5 \\ & \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 \ge 1 \end{array}$$

C -
$$\begin{array}{ll} \max & \mathbf{x}_1 + 2\,\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 \\ \text{s.t.} & \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 = 1 \\ & \mathbf{x}_2 + 2\,\mathbf{x}_3 \le 10 \\ & \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \ge 0 \end{array}$$

D -
$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \\ \text{s.t.} & \mathbf{x}_1 - 2\,\mathbf{x}_2 \ge 1 \\ & \mathbf{x}_2 + 3\,\mathbf{x}_3 \ge 2 \\ & \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \ge 0 \end{array}$$

52) Risolvere i seguenti programmi lineari con l'algoritmo primale e con l'algoritmo duale del simplesso, confrontando il numero di iterazioni (comprese quelle della ricerca della soluzione ammissibile dell'algoritmo primale).

A - min $2\,\mathbf{x}_1 + 3\,\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + 2\,\mathbf{x}_4$

s.t. $2\,\mathbf{x}_1 + 4\,\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + 5\,\mathbf{x}_4 \geq 12$

$\mathbf{x}_1 + 3\,\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 + 6\,\mathbf{x}_4 \geq 4$

$2\,\mathbf{x}_1 + 5\,\mathbf{x}_2 + 3\,\mathbf{x}_3 + 7\,\mathbf{x}_4 \geq 21$

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 \geq 0$

B - min $3\,\mathbf{x}_1 + 2\,\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + 4\,\mathbf{x}_4$

s.t. $2\,\mathbf{x}_1 + 4\,\mathbf{x}_2 + 5\,\mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4 \geq 10$

$3\,\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + 7\,\mathbf{x}_3 - 2\,\mathbf{x}_4 \geq 2$

$5\,\mathbf{x}_1 + 2\,\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + 6\,\mathbf{x}_4 \geq 15$

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 \geq 0$

C - min $\mathbf{x}_1 + 3\,\mathbf{x}_2 + 7\,\mathbf{x}_3 + 5\,\mathbf{x}_4 + 2\,\mathbf{x}_5 + 8\,\mathbf{x}_6$

s.t. $4\,\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + 2\,\mathbf{x}_3 + 3\,\mathbf{x}_4 - 5\,\mathbf{x}_5 + 6\,\mathbf{x}_6 \geq 2$

$\mathbf{x}_1 + 3\,\mathbf{x}_2 - 4\,\mathbf{x}_3 + 5\,\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_5 + 2\,\mathbf{x}_6 \geq 13$

$3\,\mathbf{x}_1 + 7\,\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 - 2\,\mathbf{x}_4 + \mathbf{x}_5 - 9\,\mathbf{x}_6 \geq 15$

$5\,\mathbf{x}_1 - 3\,\mathbf{x}_2 + 8\,\mathbf{x}_3 - 4\,\mathbf{x}_4 + 6\,\mathbf{x}_5 + \mathbf{x}_6 \geq 15$

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\,\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6 \geq 0$

53) Risolvere col metodo del simplesso i seguenti programmi lineari; specificare quante sono le soluzioni ottimali e indicare le coordinate dei vertici del primale e del duale, ammissibili e no, rappresentati da ogni tabella; scrivere il problema duale associato.

A - max $-\,\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3$

s.t. $3\,\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 = 2$

$2\,\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 = 2$

$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 \leq 2$

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \geq 0$

B - max $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$

s.t. $\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 = 1$

$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_3 = 2$

$\mathbf{x}_1 + 2\,\mathbf{x}_2 + 3\,\mathbf{x}_3 \leq 4$

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \geq 0$

54) Risolvere col metodo del simplesso i seguenti programmi lineari:

A - min $\mathbf{x}_1 + 2\,\mathbf{x}_3$

s.t. $2\,\mathbf{x}_1 + 2\,\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 = 8$

$\mathbf{x}_1 + 3\,\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_4 = 6$

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 \geq 0$

B - max $\mathbf{x}_1 - 2\,\mathbf{x}_2$

s.t. $2\,\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \leq 4$

$-\,2\,\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = -8$

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \geq 0$

55) Sia dato il seguente programma lineare **P**:

max $-\,\mathbf{x}_1 + 2\,\mathbf{x}_2$

s.t. $\mathbf{x}_1 - 10\,\mathbf{x}_2 \leq 5$

$\mathbf{x}_1 - 2\,\mathbf{x}_2 \geq -\,3$

$-\,\mathbf{x}_1 + 4\,\mathbf{x}_2 \leq 7$

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \geq 0$

A - Risolvere **P** con il metodo del simplesso.

B - Determinare $\mathbf{S_a}$ e $\mathbf{S_{ott}}$.

56) Dato il seguente programma lineare **P**:

	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	
$\mathbf{u}_1$	3	1	3	-2
$\mathbf{u}_2$	-1	-1	-2	2
$\mathbf{u}_3$	-1	-1	-4	3
$\mathbf{z}$	2	2	3	0

A - Determinare come è fatto $\mathbf{S_a}$.

B - Risolvere **P** con il metodo del simplesso e determinare $\mathbf{S_{ott}}$.

57) E' data la seguente tabella di un programma lineare **P**:

	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{u_2}$	$\mathbf{u_3}$	
$\mathbf{u_1}$	1	-2	3	8
$\mathbf{x_2}$	-1	-2	6	-3
$\mathbf{x_3}$	5	11	2	0
$\mathbf{u_4}$	1	-1	1	1
z	-1	3	-2	-3

A - Determinare come è fatto $\mathbf{S_a}$.

B - Quali vertici **V** e **V*** rispettivamente del primale e del duale corrispondono alla tabella?

C - I vertici **V** e **V*** sono ottimali? Sono degeneri?

D - Risolvere **P** col metodo del simplesso.

58) Sia dato il seguente programma lineare **P**:

	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	
$\mathbf{u_1}$	1	-2	2	-1
$\mathbf{u_2}$	1	-1	0	2
$\mathbf{u_3}$	1	-1	1	-1
z	-1	1	-1	0

Risolvere **P** con il metodo del simplesso e determinare $\mathbf{S_{ott}}$.

59) Sia dato il seguente programma lineare **P**:

	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{x_3}$	
$\mathbf{u_1}$	-2	-1	-1	**k**
$\mathbf{u_2}$	2	-3	-2	2
$\mathbf{u_3}$	5	1	1	3
z	-1	-2	**k**	0

Risolvere **P** per **k** = -1, **k** = 0, **k** = 1.
Per ciascun valore di **k** discutere i risultati ottenuti.

60) Sia data la seguente tabella, che rappresenta il vertice **V**(0, 2, 0):

	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{u_3}$	$\mathbf{x_3}$	
$\mathbf{x_2}$	-3	1	-3	2
$\mathbf{u_1}$	2	-1	1	**t** -1
$\mathbf{u_2}$	2	-1	-1	1
z	-4	2	-3	4

A - Per quali valori di **t** il vertice **V** è ammissibile? Per quali valori di **t** il vertice **V** è ottimale?

B - Nel caso in cui il vertice **V** sia ottimale, esistono altre soluzioni ottimali? Quali? Quali sono le soluzioni ottimali del problema duale?

C - Per quali valori di **t** l'origine **O** è ottimale?

61) Sia dato il programma lineare **P**:

$$\begin{array}{ll} \max & -4x_1 - x_2 - 2x_3 \\ \text{s.t.} & 3x_1 + x_2 + x_3 \geq 5 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 2 \\ & -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

A - L'origine **O*** è un vertice ammissibile per il programma lineare **P*** duale di **P**?
B - Quanti e quali vertici ammissibili ammette **P***?
C - **P*** ammette solizioni ottimali?

62) Sia dato il programma lineare **P**:

$$\begin{array}{ll} \max & x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ & x_1 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

A - Scrivere le equazioni dei suoi iperpiani generatori.
B - Scrivere il duale **P*** e le equazioni dei suoi iperpiani generatori.
C - Risolvere il programma **P** e determinare $\mathbf{S_{ott}}$.
D - Dire come si modifica $\mathbf{S_{ott}}$ aggiungendo il vincolo $3x_1 + x_2 - x_3 \geq 3$.

63) Sia data la tabella **T** che rappresenta i vertici **A**(2, 0, 5) e **A***(1, 0, 0) relativi al programma lineare **P** e al suo duale **P***:

	u_1	u_2	x_2	
x_1	-1	1	2	2
u_3	-3	1	-1	-1
x_3	1	0	-1	5
z	-1	0	-2	-5

A - **T** è ottimale per **P**? **A** è ottimale per **P**?
B - **T** è ottimale per **P***? **A*** è ottimale per **P***?
C - Determinare $\mathbf{S_{ott}}$ di **P** e $\mathbf{S_{ott}}$* di **P***.
D - I punti **B**(4, 0, 5) e **B***(2, 1, 0) appartengono a $\mathbf{S_{ott}}$ e $\mathbf{S_{ott}}$* rispettivamente?

64) Sia dato il programma lineare **P**:

$$\begin{array}{ll} \max & -2x_2 - 5x_3 \\ \text{s.t.} & x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 2 \\ & 2x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 1 \\ & x_1 - 2x_3 \leq 4 \\ & 2x_2 - 3x_3 \leq 0 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

A - Il punto **A**(1, 0, 0) è un vertice di $\mathbf{S_a}$ di **P**?
B - $\mathbf{S_a}$ contiene infiniti punti?
C - **P** ha soluzioni ottimali?

65) Sia dato il programma lineare **P**:

$$\begin{array}{ll} \max & -\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4 \\ \text{s.t.} & 2\,\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 - 4\,\mathbf{x}_4 \geq 1 \\ & -4\,\mathbf{x}_1 + 4\,\mathbf{x}_2 + 3\,\mathbf{x}_3 + 7\,\mathbf{x}_4 \leq 2 \\ & -\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + 2\,\mathbf{x}_4 \geq 1 \\ & -3\,\mathbf{x}_1 + 3\,\mathbf{x}_2 + 3\,\mathbf{x}_3 + 5\,\mathbf{x}_4 \geq 2 \\ & \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 \geq 0 \end{array}$$

A - Dimostrare che il punto **V**(2, 0, 3, 0) è un vertice, possiede tre vertici adiacenti e non è ottimale.

B - Determinare $\mathbf{S_{ott}}$ di **P** e $\mathbf{S_{ott}}$* del duale **P***.

C - Dire come si modifica $\mathbf{S_{ott}}$ aggiungendo il vincolo $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4 \leq 4$.

66) Sia dato il seguente programma lineare **P**:

	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	
$\mathbf{u}_1$	-6	2	-2	1
$\mathbf{u}_2$	-10	4	-3	1
$\mathbf{u}_3$	2	-1	1	1
z	0	1	-1	0

A - Risolvere il programma **P** e determinare $\mathbf{S_{ott}}$.

B - Il punto **A**(3/2, 6, 2) è ammissibile? E' un vertice? E' ottimale?

67) Sia dato il seguente programma lineare **P**:

	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	
$\mathbf{u}_1$	1	1	-1	-1
$\mathbf{u}_2$	2	-1	1	-1
$\mathbf{u}_3$	1	1	-2	-1
$\mathbf{u}_4$	1	-1	1	-1
z	-1	-1	-1	0

A - Dedurre direttamente dalla tabella che $\mathbf{S_a}$ e un troncone e che $\mathbf{S_a}$* del duale di **P** è un poliedro convesso non ridotto a un punto.

B - **P** e il suo duale **P*** hanno soluzioni ottimali?

68) Siano date le seguenti tabelle:

	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	
$\mathbf{u}_1$	-2	-5	1	4	4
$\mathbf{u}_2$	-1	-2	1	0	1
$\mathbf{u}_3$	-4	-13	3	9	7
$\mathbf{u}_4$	-2	-9	0	9	6
z	1	-1	-1	-2	0

	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{x}_4$	
$\mathbf{x}_1$	-1	-3	1	4	3
$\mathbf{x}_3$	-1	-1	2	4	2
$\mathbf{u}_3$	1	-4	2	5	1
$\mathbf{u}_4$	2	-3	-2	1	0
z	0	-3	-1	-2	1

A - Verificare che sono associate allo stesso programma lineare **P**.

B - Verificare che i due punti **V**(3, 0, 2, 0) e **W**(1, 0, 0, 0) sono vertici ottimali.

C - E' possibile sostituire il "-13" della prima tabella con un altro valore che modifichi le condizioni di ottimalità di **P**?

69) Siano date le seguenti tabelle:

	x_1	x_2	x_3	x_4			x_1	u_1	u_3	x_4	
u_1	0	-1	0	1	1	x_2	0	-1	0	1	1
u_2	-1	0	0	1	2	u_2	-1	0	0	1	2
u_3	-2	1	-1	0	1	x_3	-2	-1	-1	1	2
u_4	0	-1	1	-1	1	u_4	-2	0	-1	-1	2
z	0	2	1	-2	0	z	-2	-3	-1	1	4

Verificare che rappresentano lo stesso programma lineare **P** e risolvere **P**.

70) Siano date le seguenti tabelle:

	u_1	x_2	x_3	x_4			u_1	x_2	x_3	u_3	
x_1	1	-3	-1	1	-2	u_2	-1	-1	0	3	-7
u_2	2	-7	0	-3	-1	x_1	2	-5	-1	-1	0
u_3	1	-2	0	-1	2	x_4	1	-2	0	-1	2
z	-1	7	2	0	2	z	-1	7	2	0	2

A - Le due tabelle rappresentano lo stesso programma lineare **P**?
B - **P** presenta la forma normale?
C - Determinare come è fatto $\mathbf{S_a}$.
D - L'origine **O***(0, 0, 0) è duale ammissibile per **P**?

SOLUZIONI

1) B - (1, 2), (1, 4), (3, 5), (4, 1), (6, 2), (6, 5)

2) B - (0, 2), (1, 4), (3, 1), (4, 5)

5) $\rho(A) = 4$; $\rho(B) = 2$

6) $\rho(A) = 3$; $\rho(B) = 3$; $\rho(C) = 2$; $\rho(D) = 3$; $\rho(E) = 4$; $\rho(F) = 2$

A^{-1}	-1/10	3/10	3/10	E^{-1}	1/4	0	-1/8	0
	1/10	7/10	-3/10		0	2/5	-1/10	-2/5
	4/10	-2/10	-2/10		0	-1/5	-3/10	1/5
					1/4	6/5	-17/40	-1/5

7) A - $\mathbf{b}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = (3, 2, -4)$
B - $\mathbf{b}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = (3, 2, -1)$
C - $\mathbf{b}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) = (-8, 11, 4, -1)$

9) A - Linearmente indipendenti
B - Linearmente indipendenti
C - Linearmente dipendenti

19) m+n-1

20) NO

24) max $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$
s.t. $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_i$ i=1, …, m
$-\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_i$ i=1, …, m
$\mathbf{x} \geq 0$

25) A - $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i^+ - \mathbf{x}_i^-$ $\mathbf{x}_i^+, \mathbf{x}_i^- \geq 0$ i=1, …, n
B - $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i^\circ - \mathbf{y}$ $\mathbf{y}, \mathbf{x}_i^\circ \geq 0$ i=1, …, n

26) $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i^+ - \mathbf{x}_i^-$ $|\,\mathbf{x}_i\,| = \mathbf{x}_i^+ + \mathbf{x}_i^-$ $\mathbf{x}_i^+ , \mathbf{x}_i^- \geq 0$ i=1, …, n

27) $\max_i$ {max $\mathbf{c}_i^T\mathbf{x} + \mathbf{d}_i$ t.c. $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$; $\mathbf{x} \geq 0$}

28) max $\mathbf{y}^+ - \mathbf{y}^-$
s.t. $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$
$\mathbf{y}^+ - \mathbf{y}^- \leq \mathbf{c}_i^T\mathbf{x} + \mathbf{d}_i$ i=1, …, n
$\mathbf{x}, \mathbf{y}^+, \mathbf{y}^- \geq 0$

29) A - SI, se **A** è un vertice
B - SI
C - NO

D - NO

31) A - SI
B - SI

32) A - SI
B - non necessariamente

33) A - SI
B - SI, se $\mathbf{S_a}$ di **P** non era un troncone
C - SI, se $\mathbf{S_a}$ di **P** era un troncone
D - SI
E - SI
F - NO

34) A - NO
B - NO
C - NO
D - SI

35) A - per $\mathbf{S_a}$: NO, NO, SI, NO
per $\mathbf{S_{ott}}$: NO, NO, SI, NO
B - SI

36) A - NO
B - NO

37) B - NO

38) SI ; NO

39) A - SI ; NO
B - NO
C - SI

40) A - SI
B - $\mathbf{k} \leq 3$
C - $\mathbf{k} = 3$
D - Il segmento di estremi **B**(2, 1, 0, 0) e **C**(0, 5/3, 2/3, 0)

41) A - $\alpha \geq 0$; $\alpha \leq 1$; $\alpha = 0$; $\alpha = 1$; $0 \leq \alpha \leq 1$; $0 \leq \alpha \leq 1$; $\alpha = 1$; $\alpha = 0$; nessun α
B - troncone ; troncone ; vuoto ; vuoto

42) **A**(0, 0, 2) ; SI

43) A - SI ; SI
B - NO ; SI
C - NO ; SI
D - SI ; $\mathbf{z(V)} \leq \mathbf{z_{ott}} = \mathbf{w_{ott}} \leq \mathbf{w(V^*)}$

44) SI ; NO ; SI

45) A - 4 ; 3
B - SI ; SI
C - SI ; 5

46) **A**(1/3, 13/3, 0) ; **B**(0, 0, 13) ; **C**(0, 3, 0)

47) **A**(4, 1, 0) ; NO

48) $\mathbf{x}^* = (21/13, 10/13)$; $\mathbf{z}^* = 31/13$

49) B - NO
C - SI

50) A - NO
B - troncone
C - sup $\mathbf{z} = +\infty$
D - SI ; NO ; SI ; NO

51) A - $\mathbf{x}^* = (0, 1, 1/2)$; $\mathbf{z}^* = 5/2$
B - $\mathbf{x}^* = (0, 9/2, 5/2)$; $\mathbf{z}^* = -3/2$
C - $\mathbf{x}^* = (-9, 10, 0)$; $\mathbf{z}^* = 11$
D - $\mathbf{x}^* = (1, 0, 2/3)$; $\mathbf{z}^* = 1$

52) A - $\mathbf{x}^* = (0, 0, 0, 3)$; $\mathbf{z}^* = 6$
B - $\mathbf{x}^* = (65/23, 0, 20/23, 0)$; $\mathbf{z}^* = 215/23$
C - $\mathbf{x}^* = (13, 0, 0, 0, 0, 0)$; $\mathbf{z}^* = 13$

53) A - $\mathbf{x}^* = (0, 0, 2)$; $\mathbf{z}^* = 2$
B - $\mathbf{x}^* = (2, 1, 0)$; $\mathbf{z}^* = 3$

54) A - $\mathbf{x}^* = (3, 1, 0, 0)$; $\mathbf{z}^* = 3$
B - $\mathbf{x}^* = (3, 2)$; $\mathbf{z}^* = -1$

55) A - $\mathbf{z}^*= 3$
B - troncone ; $\mathbf{S_{ott}} = \{0 \leq \mathbf{x}_1 \leq 1 ; \mathbf{x}_2 = 3/2 - \mathbf{x}_1/2\}$

56) A - poliedro convesso
B - $\mathbf{z}^* = 4$; $\mathbf{S_{ott}} = \{0 \leq \mathbf{x}_1 \leq 2, \mathbf{x}_2 = 2 - \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_3 = 0\}$

57) A - troncone
B - **V**(0, -3, 0) ; **V***(0, -3, 2, 0)
C - NO ; NO ; SI ; NO
D - sup $\mathbf{z} = +\infty$

58) $\mathbf{z}^* = 1$; $\mathbf{S_{ott}}$ è il quadrilatero di vertici **A**(0, 0, 1) , **B**(1, 0, 0) , **C**(1, 3, 3) , **D**(0, 2, 3)

59) $\mathbf{k} = -1$ $\mathbf{S_a} = \emptyset$

$\mathbf{k} = 0$ $\mathbf{S_{ott}} = \mathbf{S_a} = \{(0, 0, 0)\}$
$\mathbf{k} = 1$ $\mathbf{x}^* = (0, 0, 1)$, $\mathbf{z}^* = 1$

60) A - $\mathbf{t} \geq 1$; $\mathbf{t} = 1$
B - SI ; $\mathbf{S_{ott}} = \{0 \leq \mathbf{x}_1 \leq 2, \mathbf{x}_2 = 2 - \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3 = 0\}$; $\mathbf{S_{ott}}^* = \{(2, 0, 0)\}$
C - nessun **t**

61) A - SI
B - 2 ; **A**(1, 0, 0), **B**(0, 1, 0)
C - NO

62) A - $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 - 2 = 0$
$\mathbf{x}_1 + 2\,\mathbf{x}_2 + 2\,\mathbf{x}_3 - 3 = 0$
$\mathbf{x}_1 - 1 = 0$
$\mathbf{x}_1 = 0$
$\mathbf{x}_2 = 0$
$\mathbf{x}_3 = 0$
B - min $2\,\mathbf{y}_1 + 3\,\mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_3$
s.t. $\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_3 \geq 0$
$\mathbf{y}_1 + 2\,\mathbf{y}_2 \geq 1$
$\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_3 = 0$
$\mathbf{y}_1 + 2\,\mathbf{y}_2 - 1 = 0$
C - $\mathbf{z}^* = 1$; $\mathbf{S_{ott}} = \{\mathbf{x}_1 = 1, 0 \leq \mathbf{x}_2 \leq 1, \mathbf{x}_3 = 1 - \mathbf{x}_2\}$
D - $\mathbf{z}^* = 1$; $\mathbf{S_{ott}} = \{\mathbf{x}_1 = 1, 1/2 \leq \mathbf{x}_2 \leq 1, \mathbf{x}_3 = 1 - \mathbf{x}_2\}$

63) A - NO ; NO
B - NO ; SI
C - $\mathbf{S_{ott}} = \{\mathbf{x}_1 \geq 0 , \mathbf{x}_2 = 0 , \mathbf{x}_3 = 5\}$; $\mathbf{S_{ott}}^* = \{(1, 0, 0)\}$
D - SI ; NO

64) A - NO
B - SI
C - SI

65) B - $\mathbf{S_{ott}}$ è la chiusura convessa degli spigoli illimitati $\mathbf{s}_1$: $\{\mathbf{u}_2 = 0, \mathbf{u}_3 = 0, \mathbf{x}_4 = 0\}$, $\mathbf{s}_2$: $\{\mathbf{u}_2 = 0, \mathbf{u}_3 = 0, \mathbf{u}_4 = 0\}$ e dello spigolo limitato da **A**(2, 1, 2, 0) e **B**(4, 2, 1, 1)
$\mathbf{S_{ott}}^* = \{(0, 1, 4, 0)\}$
C - $\mathbf{S_{ott}} = \emptyset$

66) A - $\mathbf{z}^* = 4$; $\mathbf{S_{ott}} = \{\mathbf{x}_1 = 3/2, \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_3 + 4, \mathbf{x}_3 \geq 0\}$
B - SI ; NO ; SI

67) B - SI

68) C - NO

69) $\mathbf{x}^*= (0, 3, 4, 2)$, $\mathbf{z}^*= 6$

70) A - SI
B - SI
C - troncone
D - NO