MODELLI DI PROGRAMMAZIONE LINEARE

1) Una compagnia petrolifera utilizza petrolio di **n** qualità differenti per le quali può rifornirsi da **m** raffinerie.
La compagnia necessita globalmente di $\mathbf{p}_i$ barili di petrolio di qualità **i**; la raffineria **j** produce giornalmente $\mathbf{a}_{ij}$ barili di petrolio di qualità **i** e ha un costo giornaliero di funzionamento $\mathbf{c}_j$.
Scrivere un modello lineare per determinare quanti giorni deve funzionare ogni raffineria per minimizzare i costi.

2) Un'industria di whisky produce **n** tipi di whisky miscelando **m** tipi di distillato.
Il whisky di tipo **i** richiede una percentuale $\mathbf{p}_{ij}$ di distillato di tipo **j**.
L'industria dispone di $\mathbf{b}_j$ litri di distillato di tipo **j** ed ha un profitto $\mathbf{c}_i$ per ogni litro di whisky di tipo **i**.
Scrivere un modello lineare per determinare quanti litri di ciascun tipo di whisky bisogna produrre per massimizzare il profitto.

3) In un ospedale vi sono **n** turni di lavoro al giorno per ognuno dei quali sono necessari almeno $\mathbf{d}_i$ medici che lavorano per **m** turni consecutivi.
Trovare l'orario di lavoro che minimizza il numero di medici necessari ogni giorno.
Scrivere un modello lineare.
Considerando inoltre che lo stipendio per il turno **i** è $\mathbf{c}_i$, trovare l'orario di lavoro che minimizza il costo giornaliero dei medici.
Modificare il modello lineare precedente.

4) Un sarto dispone di **n** tipi di stoffe per confezionare abiti di **m** tipi.
Un abito di tipo **j** richiede $\mathbf{A}_{ij}$ mq. di stoffa di tipo **i** e si vende a un prezzo $\mathbf{c}_j$.
Sapendo che dispone di $\mathbf{b}_i$ mq. di stoffa di tipo **i**, scrivere un modello lineare per determinare quanti abiti per ogni tipo deve confezionare il sarto per massimizzare il ricavo.

5) Un mobilificio produce **n** tipi di mobili. Vi sono **m** operai; l'operaio **i** impiega $\mathbf{A}_{ij}$ ore per costruire un mobile di tipo **j**.
Ogni operaio può lavorare $\mathbf{b}_i$ ore alla settimana e il profitto per un mobile di tipo **j** è $\mathbf{c}_j$.
Scrivere un modello lineare intero per determinare quanti mobili di ogni tipo è necessario costruire ogni settimana per massimizzare il profitto.

6) Un'industria produce **n** tipi di radio utilizzando **m** tipi di componenti elettronici.
Ogni giorno possono essere prodotte al più $\mathbf{k}_j$ radio di tipo **j** e sono disponibili $\mathbf{e}_i$ componenti elettronici di tipo **i** e **H** ore lavorative.
Ogni radio di tipo **j** richiede $\mathbf{A}_{ij}$ componenti elettronici di tipo **i**, $\mathbf{h}_j$ ore lavorative e da un profitto $\mathbf{c}_j$.
Scrivere un modello lineare intero per determinare quante radio di ciascun tipo bisogna produrre per massimizzare il profitto.

7) Una piccola industria di lavorazione di materiale grezzo può rifonirsi da due fornitori.
Il primo può fornire giornalmente un massimo di 20 quintali ad un prezzo di 70.000 lire al quintale; il secondo può fornire giornalmente da un minimo di 5 quintali ad un massimo di 15 quintali ad un prezzo di 90.000 lire al quintale.

Ogni quintale di materiale richiede un'ora di lavoro da parte di un operaio e viene rivenduto a 100.000 lire.
Ogni operaio lavora 7 ore al giorno con una paga giornaliera di 90.000 lire.
Scrivere un modello lineare intero che massimizzi i profitti e risolvere il problema numericamente.

8) Un investitore ha 4 possibilità di investimento dei quali conosce il tasso di interesse annuo, il fattore di rischio e la durata dell'investimento, come esposto nella seguente tabella:

Tipo di investimento	Interesse annuo (%)	Fattore di rischio	Durata in anni
A	6.00	0.05	10
B	5.25	0.02	4
C	6.50	0.13	5
D	14.00	0.45	2

L'investitore vuole che il fattore di rischio medio non superi 0.27 e la durata media dell'investimento sia non inferiore a 5 anni.
Scrivere un modello lineare per trovare come ripartire il suo capitale in modo da massimizzare l'interesse medio annuo e risolvere numericamente col metodo del simplesso.

9) Un fabbricante di tessuti produce **n** tipi di lana per abiti utilizzando filati di **m** colori. Per produrre 1 metro di lana di tipo **j** occorrono $\mathbf{G}_{ij}$ grammi di filato di colore **i**.
La disponibilità giornaliera di filato di colore **i** è di $\mathbf{f}_i$ kg. e la richiesta di lana di tipo **j** è di $\mathbf{r}_j$ metri.
Ogni metro di lana di tipo **j** fornisce un ricavo $\mathbf{c}_j$ e ha un costo $\mathbf{k}_j$.
Scrivere un modello lineare per massimizzare il profitto giornaliero.

10) Una ditta di vernici deve produrre una tinta con determinate caratteristiche miscelando vernici base e solventi. Essa dispone di **n** vernici base e **m** solventi, che determinano **p** caratteristiche della tinta in base alle percentuali in cui vengono utilizzati.
La caratteristica **k** dipende dalla quantità di componente **k** presente nella tinta.
Le caratteristiche volute impongono che il componente **k** sia presente in una quantità compresa tra $\mathbf{L}_k$ e $\mathbf{U}_k$ grammi per litro.
La vernice base **i** contiene $\mathbf{V}_{ki}$ grammi per litro di componente **k**, mentre il solvente **j** ne contiene $\mathbf{S}_{kj}$ grammi per litro.
Un litro di vernice base **i** ha un costo $\mathbf{c}_i$ e un litro di solvente **j** ha un costo $\mathbf{k}_j$.
Scrivere un modello lineare per minimizzare il costo per litro della tinta con le caratteristiche richieste.

11) Una ditta deve programmare l'assunzione di nuovo personale e la relativa formazione per i prossimi **m** mesi, sapendo che per il mese **i** saranno necessarie $\mathbf{d}_i$ ore di lavoro.
Ogni persona neo assunta richiede un mese di addestramento che occupa **a** ore di lavoro da parte di una persona già in servizio.
Il personale in servizio non può lavorare per contratto più di **o** ore al mese, mentre quello in addestramento non svolge alcun lavoro effettivo.
Il costo mensile di una persona in servizio è **c** e quello di una persona in addestramento è **k**.
Inizialmente sono in servizio **P** persone e alla fine degli **m** mesi ne saranno necessarie non meno di **P'**, ma alla fine di ogni mese vi è una percentuale **t** che lascia il servizio.
Scrivere un modello lineare per minimizzare i costi.

12) Un commesso viaggiatore deve visitare **n** città, cominciando dalla città **1** e ritornando alla città **1** senza ripassare da alcuna città.
Determinare il percorso di costo minimo sapendo che il costo per andare dalla città **i** alla città **j** è $\mathbf{c}_{ij}$.
Fare un modello lineare tenendo presente che deve essere un giro, quindi non sono ammessi i sottogiri.

13) Un ente locale deve appaltare **n** progetti e ha ricevuto i preventivi di **m** ditte e sia $\mathbf{c}_{ij}$ il costo per appaltare il progetto **i** alla ditta **j**; come misura precauzionale l'ente locale decide di non appaltare più di **k** progetti alla stessa ditta.
Scrivere un modello lineare intero per minimizzare i costi per l'ente locale.
Si supponga ora che per ragioni politiche l'ente non voglia appaltare più di **p** grandi progetti alle ditte che non risiedono all'interno della giurisdizione dell'ente, dove i grandi progetti sono i primi **s** e le ditte esterne sono le prime **t**.
Anche in questo caso scrivere un modello lineare intero per minimizzare i costi per l'ente locale.

14) Il parlamento di uno stato è composto di **K** deputati; nello stato esistono **J** province (**J > K**) che devono essere raggruppate in **K** distretti elettorali, ognuno dei quali elegge un deputato.
La popolazione totale dello stato è **P** per cui dovrebbe essere eletto un deputato ogni **p** abitanti; pertanto ogni distretto dovrebbe raggruppare più province contigue in modo da avere una popolazione di circa **p** abitanti.
Una commissione ha elaborato un elenco di possibili raggruppamenti delle province in distretti, ottenendo **N** distretti ciascuno con una popolazione $\mathbf{p}_i$.
Si vogliono selezionare **K** distretti in modo che ogni provincia faccia parte di un solo distretto.
Scrivere un modello lineare intero per minimizzare il valore assoluto dello scarto massimo $|\mathbf{p} - \mathbf{p}_i|$.

15) Un'industria vuole pianificare la produzione per i mesi di Settembre, Ottobre, Novembre e Dicembre.
Le richieste sono rispettivamente di 70, 60, 90 e 50 unità. La capacità produttiva è di 100 unità al mese.
I costi unitari di produzione nei 4 mesi sono rispettivamente di 24.000 lire, 28.000 lire, 27.000 lire e 31.000 lire; i costi unitari di magazzinaggio sono di 2.000 lire per ciascun mese successivo a quello di produzione.
Inizialmente il magazzino è vuoto e anche alla fine deve essere vuoto.
Trovare quante unità bisogna produrre e quante unità mettere in magazzino in ciascun mese per minimizzare i costi.
Scrivere un modello lineare e risolvere numericamente col metodo del simplesso.

16) Una società vuole collegare tra loro **n** capannoni tramite camminamenti coperti; la società non ritiene necessario che vi sia un camminamento che collega ogni coppia di capannoni, ma è sufficiente che da ogni capannone sia possibile andare in tutti gli altri, anche se non per la strada più breve.
Indicato con $\mathbf{c}_{ij}$ il costo della costruzione del camminamento dal padiglione **i** al padiglione **j**, si vuol sapere quali camminamenti devono essere costruiti per minimizzare i costi di costruzione.
Scrivere un modello lineare.

17) Una fabbrica produce due tipi di materiale (A e B); ogni Kg. di materiale A richiede 3 ore di preparazione e 2 ore di rifinitura, ogni Kg. di materiale B richiede 5 ore di preparazione e 2 ore di rifinitura.
I macchinari per la preparazione sono disponibili per non più di 40 ore giornaliere complessive, quelli per la rifinitura per non più di 30 ore giornaliere complessive.
Il profitto dato dal prodotto B è K volte quello dato dal prodotto A, dove K a seconda del mercato può assumere qualunque valore tra 1 e 2.
Scrivere un modello lineare per determinare i quantitativi giornalieri da produrre che massimizzano il profitto a seconda del valore di K e risolvere numericamente col metodo del simplesso.

18) Per ben alimentare un certo tipo di animale è necessario fornirgli 4 sostanze base: A, B, C e D.
La quantità minima giornaliera che ogni animale richiede è: 0.4 Kg di A, 0.6 Kg di B, 2 Kg di C e 1.3 Kg di D. Il cibo è ottenuto mescolando 2 farine M ed N.
1 Kg di M contiene: 100 gr di A, nulla di B, 100 gr di C e 100 gr di D.
1 Kg di N contiene: nulla di A, 100 gr di B, 200 gr di C e 100 gr di D.
Con 1$ possiamo comperare 4 Kg di M o 8 Kg di N.
Fare un modello lineare per determinare la quantità giornaliera di farine M ed N da comperare per alimentare un animale a costo minimo e risolvere numericamente col metodo del simplesso.

19) Siano dati **n** alimenti contenenti **m** fattori nutritivi.
Sia $\mathbf{A}_{ij}$ la quantità percentuale di fattore nutritivo **i** nell'alimento **j**, $\mathbf{b}_i$ il fabbisogno minimo del fattore nutritivo **i**, $\mathbf{c}_j$ il costo unitario dell'alimento **j**.
Trovare la dieta di minor costo che soddisfa i fabbisogni minimi.
Fare un modello lineare.

20) Una industria di raffinazione produce due lavorati P e Q che ricava da 3 materiali grezzi A, B, C che li contengono in differenti percentuali.
Da ogni unita' di materiale A si possono ricavare 0.30 unita' di P e 0.40 unita' di Q.
Da ogni unita' di materiale B si possono ricavare 0.20 unita' di P e 0.10 unita' di Q.
Da ogni unita' di materiale C si possono ricavare 0.05 unita' di P e 0.40 unita' di Q.
I costi unitari sono rispettivamente 15$ per A, 6$ per B, 10$ per C.
L'industria deve soddisfare una richiesta di 6 unita' di lavorato P e 9 unita' di lavorato Q.
Fare un modello lineare per determinare le quantità di materiali A, B, C da comperare per soddisfare le richieste di P e Q a costo minimo e risolvere numericamente col metodo del simplesso.

21) Una industria produce due oggetti di tipo A e B utilizzando 2 materiali M e N.
Per produrre un oggetto di tipo A si usano 7 unita' di M e 1 unita' di N.
Per produrre un oggetto di tipo B si usano 2 unita' di M e 2 unita' di N.
I profitti di vendita sono rispettivamente 7$ per A, 8$ per B.
L'industria dispone di 21 unita' di materiale M e 6 unita' di materiale N.
Scrivere il modello lineare intero per determinare la produzione di massimo profitto e risolvere numericamente.

22) Una industria di profumi produce due differenti tipi di acqua di colonia utilizzando 2 essenze base.

Ogni quintale della prima acqua di colonia richiede 2 litri della prima essenza e 4 litri della seconda, mentre ogni quintale della seconda acqua di colonia richiede 3 litri della prima essenza e 1 litro della seconda.
L'industria dispone di 6 litri della prima essenza e di 4 litri della seconda.
I profitti di vendita per ogni quintale di acqua di colonia sono rispettivamente 4ML e 3ML.
Scrivere il modello lineare per determinare la produzione di ciascun tipo di acqua di colonia, in modo da massimizzare il profitto e risolvere numericamente col metodo del simplesso.

23) Una industria dolciaria produce cioccolato al latte e cioccolato fondente.
Ogni quintale di cioccolato al latte richiede 0.6 quintali di latte e 0.1 quintali di cacao, mentre ogni quintale di cioccolato fondente richiede 0.5 quintali di latte e 0.1 quintali di cacao.
L'industria dispone di 6 quintali di latte e 1.1 quintali di cacao.
I profitti di vendita per ogni quintale di cioccolato al latte e cioccolato fondente sono rispettivamente 3ML e 2ML.
A - Scrivere il modello lineare per determinare la produzione di ciascun tipo di cioccolato, in modo da massimizzare il profitto e risolvere numericamente col metodo del simplesso.
B - La produzione di ogni quintale di cioccolato al latte richiede 8 ore di lavorazione e di ogni quintale di cioccolato fondente richiede 3 ore di lavorazione.
Nell'ipotesi che i macchinari possano globalmente fornire non più di 48 ore di lavorazione, modificare il modello e determinare la nuova soluzione ottimale partendo dalla tabella ottimale precedente, utilizzando l'algoritmo duale del simplesso.

24) Un calzaturificio produce scarpe estive, sandali e scarpe invernali.
Ogni scarpa estiva richiede 0.05 Kg. di cuoio, 0.2 Kg. di pelle, 0.1 Kg. di metallo; ogni sandalo richiede 0.05 Kg. di cuoio, 0.15 Kg. di pelle, 0.05 Kg. di metallo; ogni scarpa invernale richiede 0.1 Kg. di cuoio, 0.5 Kg. di pelle, 0.2 Kg. di metallo.
Le disponibilità sono 0.8 Kg. di cuoio, 2.7 Kg. di pelle, 1.2 Kg. di metallo.
I profitti di vendita sono 13.000 lire per ogni paio di scarpe estive, 8.000 lire per ogni paio di sandali, 28.000 lire per ogni paio di scarpe invernali.
Scrivere il modello lineare intero per determinare quante paia di scarpe estive, sandali e scarpe invernali produrre per massimizzare il profitto e risolverlo numericamente.

25) Un mobilificio produce due tipi di sedie di legno A e B.
Per ogni sedia di tipo A prodotta è necessaria un'asse di legno e per ogni sedia di tipo B prodotta sono necessarie tre assi di legno. Per motivi contrattuali le sedie di tipo A prodotte devono essere almeno la metà delle sedie di tipo B prodotte.
Sapendo che sono disponibili nove assi di legno e che il profitto delle sedie di tipo B è quadruplo del profitto delle sedie di tipo A, scrivere il modello lineare intero per massimizzare i profitti e risolverlo numericamente.

26) Un lanificio produce filato di tipo standard e filato di tipo speciale, utilizzando 3 differenti macchine A, B e C le cui produzioni orarie sono rispettivamente:
macchina A: 3 matasse di tipo standard e 1 di tipo speciale
macchina B: 1 matassa di tipo standard e 2 di tipo speciale
macchina C: 2 matasse di tipo standard e 1 di tipo speciale
Le richieste minime giornaliere sono 50 matasse di tipo standard e 40 matasse di tipo speciale.
I costi orari delle macchine sono rispettivamente 90.000 lire per la macchina A, 80.000 lire per la macchina B e 60.000 lire per la macchina C.
A - Scrivere il modello lineare per determinare quante ore bisogna utilizzare ciascuna macchina per minimizzare i costi e risolverlo con l'algoritmo del simplesso.

B - Successivamente si supponga che la macchina C non possa essere utilizzata più di 15 ore al giorno. Modificare il modello e determinare la nuova soluzione ottimale.

27) Un'industria produce tre oggetti A, B, C utilizzando due materie prime M, N.
Per produrre un oggetto A sono necessarie 3 unità di M e 1 unità di N.
Per produrre un oggetto B sono necessarie 3 unità di M e 4 unità di N.
Per produrre un oggetto C sono necessarie 2 unità di M e 2 unità di N.
L'industria dispone di 10 unità di M e 8 unità di N.
L'oggetto A fornisce un profitto pari al doppio dell'oggetto B e pari a 2/3 dell'oggetto C.
Scrivere il modello lineare intero che massimizza il profitto e risolverlo numericamente.

28) Un'impresa edile deve costruire due strade A e B. Per ogni chilometro della strada A sono necessari 2 operai e 2 quintali di materia prima; per ogni chilometro della strada B sono necessari 3 operai e 1 quintale di materia prima.
Ogni chilometro della strada A fornisce un profitto di 2 milioni e ogni chilometro della strada B fornisce un profitto di 5 milioni.
L'impresa dispone di 8 operai che devono lavorare tutti e di un massimo di 5 quintali di materia prima.
Scrivere un modello lineare per determinare quanti chilometri di strada di ciascun tipo devono essere costruiti per massimizzare il profitto e risolvere numericamente il problema con l'algoritmo del simplesso.

SOLUZIONI NUMERICHE

7) Primo fornitore = 20 quintali
Secondo fornitore = 0 quintali
Numero operai = 3
Profitto massimo = 330.000 lire

8) Investimento A = 45 %
Investimento B = 0 %
Investimento C = 0 %
Investimento D = 55 %
Interesse medio annuo massimo = 10,4 %

15) Produzione di Settembre = 100 unità
Immagazzinamento di Settembre = 30 unità
Produzione di Ottobre = 30 unità
Immagazzinamento di Ottobre = 0 unità
Produzione di Novembre = 100 unità
Immagazzinamento di Novembre = 10 unità
Produzione di Dicembre = 40 unità
Immagazzinamento di Dicembre = 0 unità
Costo minimo = 7.260.000 lire

17) Produzione giornaliera di A = 13.333 Kg. se $1 \leq K \leq 5/3$
0 Kg. se $5/3 < K \leq 2$
Produzione giornaliera di B = 0 Kg. se $1 \leq K \leq 5/3$
8 Kg. se $5/3 < K \leq 2$
Profitto massimo (profitto di A unitario) = 13.333 K se $1 \leq K \leq 5/3$
8 K se $5/3 < K \leq 2$

18) Quantità giornaliera di farina N = 4 Kg.
Quantità giornaliera di farina M = 9 Kg.
Costo minimo = 2.25 $

20) Quantità di materiale A = 0 unità
Quantità di materiale B = 26 unità
Quantità di materiale C = 16 unità
Costo minimo = 316 $

21) Oggetti di tipo A = 2 unità
Oggetti di tipo B = 2 unità
Profitto massimo = 30 $

22) Produzione della prima acqua di colonia = 0.6 quintali
Produzione della seconda acqua di colonia = 1.6 quintali
Profitto massimo = 7.2 ML

23) A - Produzione di cioccolato al latte = 10 quintali
Produzione di cioccolato fondente = 0 quintali
Profitto massimo = 30 ML
B - Produzione di cioccolato al latte = 3 quintali

Produzione di cioccolato fondente = 8 quintali
Profitto massimo = 25 ML

24) Scarpe estive = 5 paia
Sandali = 2 paia
Scarpe invernali = 0 paia
Profitto massimo = 81.000 lire.

25) Sedie di tipo A = 3 unità
Sedie di tipo B = 2 unità
Profitto massimo = 11 volte il profitto di una sedia di tipo A.

26) A - Utilizzo della macchina A = 0 ore
Utilizzo della macchina B = 10 ore
Utilizzo della macchina C = 20 ore
Costo minimo = 200.000 lire
B - Utilizzo della macchina A = 3 ore
Utilizzo della macchina B = 11 ore
Utilizzo della macchina C = 15 ore
Costo minimo = 205.000 lire

27) Oggetti A = 0 unità
Oggetti B = 0 unità
Oggetti C = 4 unità
Profitto massimo = 12 volte il profitto di un oggetto B.

28) Strada A = 0 Km.
Strada B = 2,666 Km.
Profitto massimo = 13,333 milioni.