Prova parziale di $\mathcal{MATEMATICA\ II}$		11 Aprile 2017
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 1

Risolvere con l'eliminazione di Gauss il sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

Tempo suggerito: 20 minuti
Punteggio: 15 punti

Prova scritta di **$\mathcal{MATEMATICA\ II}$**		11 Aprile 2017
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 2

Sia U lo spazio reale $\mathbb{R}^3$ e sia V lo spazio delle matrici 2×2 definito sul campo $\mathbb{R}$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare. Determinare se l'applicazione $f : U \longrightarrow V$ definita da:

$$f(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

è un omomorfismo.

Tempo suggerito: 20 minuti
Punteggio: 18 punti

SOLUZIONE 1:
Applicando il metodo di Gauss alla martice completa si ha:

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -5 & 2 & 3 \end{array}\right) \underset{R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1}{\xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - R_1}} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

per cui a ritroso si ha $x_4 = s; x_3 = t; x_2 = 1 - 3t; x_1 = 2 - 2(1 - 3t) + t - s = 7t - s$

SOLUZIONE 2: L'applicazione f conserva la somma:

$$f(a, b, c) + f(a', b', c') = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ b & c \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc} a' & b' \\ b' & c' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} a + a' & b + b' \\ b + b' & c + c' \end{array}\right) =$$

$$= f(a + a', b + b', c + c') = f((a, b, c) + (a', b', c'))$$

L'applicazione f conserva il prodotto per scalari:

$$f(k(a, b, c)) = f(ka, kb, kc) = \left(\begin{array}{cc} ka & kb \\ kb & kc \end{array}\right) = k \left(\begin{array}{cc} a & b \\ b & c \end{array}\right) = kf(a, b, c)$$

quindi f è un omomorfismo.