Prova scritta di $\mathcal{MATEMATICA\ II}$		20 Giugno 2017
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 1

(per tutti)

Determinare i massimi e i minimi relativi della funzione:

$$f(x, y) = x^4 + 4xy + y^2$$

Tempo suggerito: 25 minuti
Punteggio: 16 punti

Prova scritta di $\mathcal{MATEMATICA\ II}$		20 Giugno 2017
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 2

(per chi fa la terza prova parziale)

Calcolare l'integrale doppio di $f(x,y) = x^2(y+1)$ sul dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2-x\}$.

Tempo suggerito: 25 minuti
Punteggio: 17 punti

Prova scritta di $\mathcal{MATEMATICA\ II}$		20 Giugno 2017
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 3

(per chi fa la prova completa)

Si consideri l'omomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definito da:

$$f(a, b, c) = (a + b, 2c)$$

a. Determinare la matrice associata rispetto alla base canonica.

b. Determinare il nucleo e l'immagine.

c. Determinare la controimmagine di $(1, 1)$.

Tempo suggerito: 25 minuti
Punteggio: 14 punti

SOLUZIONE 1:
$f_x(x,y) = 4x^3 + 4y$; $f_y(x,y) = 4x + 2y$ che si annullano in $(0,0), (\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.
$f_{xx}(x,y) = 12x^2$; $f_{xy}(x,y) = 4$; $f_{yx}(x,y) = 4$; $f_{yy}(x,y) = 2$
$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ il cui polinomio caratteristico è $\lambda^2 - 2\lambda - 16$ che ha radici discordi, quindi $(0,0)$ è un punto di sella.
$H(\sqrt{2}, -2\sqrt{2}) = H(-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 24 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ il cui polinomio caratteristico è $\lambda^2 - 26\lambda + 32$ che ha radici concordi positive, quindi $(\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ sono punti di minimo.

SOLUZIONE 2:

$$\int\int_D x^2(y+1)dxdy = \int_0^2 x^2 \left(\int_0^{2-x} y + 1 dy \right) dx = \int_0^2 x^2 \left[\frac{y^2}{2} + y \right]_0^{2-x} dx =$$
$$\int_0^2 \frac{x^4}{2} - 3x^3 + 4x^2 dx = \left[\frac{x^5}{10} - \frac{3x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{28}{15}$$

SOLUZIONE 3:

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b. Dalla matrice A si ricava che $Ker(f) = \mathcal{L}(1,-1,0)$ e $Im(f) = \mathcal{L}((1,0),(0,2))$.

c. Risolvendo il sistema $Ax = (1,1)^T$ si ricava $f^{-1}(1,1) = \{(1-t, t, \frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}\}$.