| **Prova scritta di** $\mathcal{MATEMATICAII}$ | | 20 Febbraio 2018 |
|---|---|---|
| Cognome: | Nome: | Matricola: |

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non è consentito consegnare fogli di brutta.

## Esercizio 1

Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$f(a, b, c) = (3a - b, b - c, c)$$

a. Determinare gli autovalori di $f$.

b. Determinare una base per ciascuno degli autospazi associati agli autovalori.

c. Dire se l'endomorfismo è semplice, giustificando la risposta.

*Tempo suggerito: 25 minuti*
*Punteggio: 15 punti*

| **Prova scritta di** $\mathcal{MATEMATICAII}$ | | 20 Febbraio 2018 |
| --- | --- | --- |
| Cognome: | Nome: | Matricola: |

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non è consentito consegnare fogli di brutta.

## Esercizio 2

Calcolare l'integrale doppio di $f(x,y) = x^2 + y^2$ sul dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$.

*Tempo suggerito: 25 minuti*
*Punteggio: 15 punti*

SOLUZIONE 1:

a. La matrice associata rispetto alla base canonica è

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è $(3-\lambda)(\lambda-1)^2$, le cui radici sono $\lambda_1 = 3; \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ e sono gli autovalori cercati.

b. Per determinare l'autospazio $V_3$ associato a $\lambda_1$ è sufficiente trovare il nucleo dell'endomorfismo associato alla matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

da cui risulta $V_3 = \mathcal{L}((1,0,0))$.
Per determinare l'autospazio $V_1$ associato a $\lambda_2$ e $\lambda_3$ è sufficiente trovare il nucleo dell'endomorfismo associato alla matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui risulta $V_{-1} = \mathcal{L}((1,2,0))$.

c. L'endomorfismo non è semplice, poichè l'autovalore 1 ha molteplicità geometrica 1 e algebrica 2.

SOLUZIONE 2:

$$\int\int_D x^2 + y^2 \ dxdy = \int_0^2 \left( \int_0^1 x^2 + y^2 \ dx \right) dy = \int_0^2 \left[ \frac{x^3}{3} + xy^2 \right]_0^1 dy = \int_0^2 \frac{1}{3} + y^2 dy = \left[ \frac{1}{3}y + \frac{y^3}{3} \right]_0^2 = \frac{2}{3} + \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$$