Prova scritta di $\mathcal{MATEMATICA\ II}$		10 Luglio 2018
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 1

Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a. Determinare gli autovalori di f.

b. Determinare una base per ciascuno degli autospazi associati agli autovalori.

c. Dire se l'endomorfismo è semplice, giustificando la risposta.

Tempo suggerito: 25 minuti
Punteggio: 15 punti

Prova scritta di $\mathcal{MATEMATICA\ II}$		10 Luglio 2018
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 2

Determinare i massimi e i minimi relativi della funzione:

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3$$

Tempo suggerito: 20 minuti
Punteggio: 15 punti

SOLUZIONE 1:

a. Il polinomio caratteristico è $(4-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+8)$, le cui radici sono $\lambda_1=\lambda_2=4; \lambda_3=2$ e sono gli autovalori cercati.

b. Per determinare l'autospazio V_4 associato a λ_1 e λ_2 è sufficiente trovare il nucleo dell'endomorfismo associato alla matrice:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
da cui risulta $V_4=\mathcal{L}((1,0,1),(1,-1,0))$.
Per determinare l'autospazio V_2 associato a λ_3 è sufficiente trovare il nucleo dell'endomorfismo associato alla matrice:
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
da cui risulta $V_2=\mathcal{L}((0,1,-1))$.

c. L'endomorfismo è semplice, poichè l'autovalore 4 ha molteplicità geometrica e algebrica 2.

SOLUZIONE 2:
$f_x(x,y)=2x-2y; f_y(x,y)=-2x+y^2$ che si annullano in $(0,0)$ e $(2,2)$.
$f_{xx}(x,y)=2; f_{xy}(x,y)=-2; f_{yx}(x,y)=-2; f_{yy}(x,y)=2y$
$H(0,0)=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$; il polinomio caratteristico è $\lambda^2-2\lambda-4$ che ha radici discordi, quindi $(0,0)$ è un punto di sella.
$H(2,2)=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$; il polinomio caratteristico è $\lambda^2-6\lambda+4$ che ha radici concordi positive, quindi $(0,0)$ è un punto di minimo relativo.