Prova parziale di $\mathcal{MATEMATICA\ II}$		16 Maggio 2019
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non verranno corretti esercizi su fogli diversi da questi.

Esercizio 1

Determinare una base per ciascuno degli autospazi dell'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definito dalla seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dire se l'endomorfismo è semplice.

Tempo suggerito: 25 minuti
Punteggio: 18 punti

Prova scritta di $\mathcal{MATEMATICA\ II}$		16 Maggio 2019
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non verranno corretti esercizi su fogli diversi da questi.

Esercizio 2

Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D x + y^2 - 3 \; dxdy$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, x - 1 \leq y \leq x\}$.

Tempo suggerito: 25 minuti
Punteggio: 15 punti

SOLUZIONE 1:
Il polinomio caratteristico è dato dal determinante della matrice:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

cioè $\lambda(3-\lambda)(\lambda-3)$ che ha radici $0, 3, 3$.
L'autospazio V_0 corrisponde al nucleo dell'omomorfismo associato alla matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Applicando il metodo di Gauss si ha:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 + R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per cui si ha $x_3 = t; x_2 = -\frac{5t}{3}; x_1 = 2t$ e quindi $V_0 = \mathcal{L}(6, -5, 3)$.
L'autospazio V_3 corrisponde al nucleo dell'omomorfismo associato alla matrice:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Applicando il metodo di Gauss si ha:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - \frac{1}{2}R_1]{R_2 \leftarrow R_2 + R_1} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per cui si ha $x_2 = t; x_3 = 0; x_1 = 0$ e quindi $V_3 = \mathcal{L}(0, 1, 0)$.
L'endomorfismo non è semplice poiché per l'autovalore $\lambda = -3$ la molteplicità algebrica è 2 e quella geometrica è 1.

SOLUZIONE 2:

$$\int_0^1 \left(\int_{x-1}^{x} x + y^2 - 3 \; dy \right) dx = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^3}{3} - 3y \right]_{x-1}^{x} dx = \int_0^1 x^2 - \frac{8}{3} \; dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{8x}{3} \right]_0^1 = -\frac{7}{3}$$