Prova scritta di $\mathcal{MATEMATICA\ II}$		28 Gennaio 2020
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non verranno corretti esercizi su fogli diversi da questi.

Esercizio 1

Risolvere col metodo di Gauss is seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_4 = 2 \\ -2x_1 - 4x_2 - x_3 = -5 \\ 6x_1 + 14x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 16 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 12 \end{cases}$$

Tempo suggerito: 25 minuti
Punteggio: 15 punti

Prova scritta di $\mathcal{MATEMATICA\ II}$	28 Gennaio 2020

Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non verranno corretti esercizi su fogli diversi da questi.

Esercizio 2

Determinare i massimi e i minimi relativi della funzione

$$f(x,y) = x^2y - 2xy + y^2$$

Tempo suggerito: 25 minuti
Punteggio: 15 punti

SOLUZIONE 1:
Applicando il metodo di Gauss alla matrice si ha:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & -1 & 0 & -5 \\ 6 & 14 & 3 & 2 & 16 \\ 4 & 6 & 3 & -2 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 + 2R_1} \\ \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 6R_1} \\ \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - 4R_1} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & -6 & 3 & -6 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + 2R_2} \\ \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 + 3R_2} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Dalla quarta riga si deduce che il sistema è impossibile.

SOLUZIONE 2:
Le derivate parziali sono $f_x(x,y) = 2xy - 2y$ e $f_y(x,y) = x^2 - 2x + 2y$ che si annullano in $(0,0), (2,0)$ e $(1, \frac{1}{2})$. Le derivate seconde sono $f_{xx}(x,y) = 2y$, $f_{xy}(x,y) = 2x - 2$, $f_{yx}(x,y) = 2x - 2$, $f_{yy}(x,y) = 2$ per cui si ha:

$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ che ha autovalori discordi, per cui si ha un punto di sella.

$H(2,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ che ha autovalori discordi, per cui si ha un punto di sella.

$H(1, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ che ha autovalori concordi positivi, per cui si ha un punto di minimo relativo.