1 Calcolo dell'equilibrio di Nash in strategie miste

Si consideri la battaglia dei sessi:

I/II	T	P
T	$2,1$	$0,0$
P	$0,0$	$1,2$

Se il giocatore I gioca la strategia mista $(p, 1-p)$ e il giocatore II gioca la strategia mista $(q, 1-q)$ la vincita attesa del giocatore I è:

$$v_I(p) = 2pq + 0(1-p)q + 0p(1-q) + 1(1-p)(1-q) = 3pq - p - q + 1 = (3q-1)p - (q-1)$$

Il secondo termine non dipende da p; si hanno quindi tre casi

$3q - 1 > 0 \Rightarrow p = 1$ (strategia pura)

$3q - 1 = 0 \Rightarrow p \in]0, 1[$ (strategia mista)

$3q - 1 < 0 \Rightarrow p = 0$ (strategia pura)

Analogamente la vincita attesa del giocatore II è:

$$v_{II}(q) = 1pq + 0(1-p)q + 0p(1-q) + 2(1-p)(1-q) = 3pq - 2p - 2q + 2 = (3p-2)q - 2(p-1)$$

a cui corrispondono i tre casi:

$3p - 2 > 0 \Rightarrow q = 1$ (strategia pura)
$3p - 2 = 0 \Rightarrow q \in]0, 1[$ (strategia mista)
$3p - 2 < 0 \Rightarrow q = 0$ (strategia pura)

Si ha un equilibrio in strategie miste se:

$$3q - 1 = 0 \Rightarrow q = \frac{1}{3}$$
$$3p - 2 = 0 \Rightarrow p = \frac{2}{3}$$

cioè $\left(\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right)$

- La vincita attesa è $v_I = v_{II} = \frac{2}{3}$, cioè inferiore alla vincita minima derivante da un accordo (non vincolante) per una strategia pura

2 Inefficienza dell'equilibrio di Nash e instabilità

L'aumento delle strategie dei giocatori può generare soluzioni instabili ed equilibri inefficienti

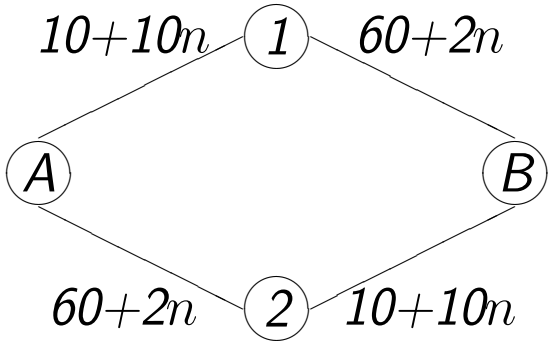
I/II	L	C
T	$2,2$	$0,0$
M	$0,0$	$-1,-1$

(T, L) è l'unico equilibrio di Nash ed è efficiente
Aggiungendo le strategie B e R, rispettivamente, con opportuni payoff:

I/II	L	C	R
T	$2,2$	$0,0$	$0,3$
M	$0,0$	$-1,-1$	$0,1$
B	$3,0$	$1,0$	$1,1$

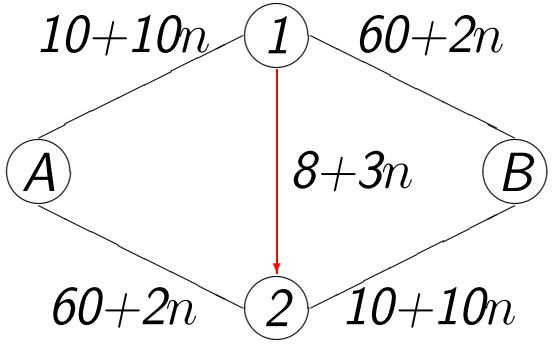
(B, R) è l'unico equilibrio di Nash ma è inefficiente

Esempio 2.1 (Paradosso di Pigou) *6 utenti devono spostarsi da A a B e possono utilizzare due strade, $A-1-B$ e $A-2-B$*
La percorrenza di ogni tratto ha un tempo fisso e un fattore di congestione



La soluzione ottimale si ottiene quando ogni strada è percorsa da tre utenti, con tempo di percorrenza $10 + 10 \times 3 + 60 + 2 \times 3 = 106$
Questa soluzione è anche un equilibrio di Nash

Costruendo una strada a senso unico che collega 1 *e* 2*, con tempo fisso* 8 *e fattore di congestione* $3n$



Un utente di $A-1-B$ *ha interesse a passare su* $A-1-2-B$ *con tempo* $10+10\times 3+8+3\times 1+10+10\times 4=101$

I due utenti su $A-1-B$ *impiegano* $10+10\times 3+60+2\times 2=104$*, mentre i tre su* $A-2-B$ *impiegano* $60+2\times 3+10+10\times 4=116$

Se un utente di $A-2-B$ *passa su* $A-1-2-B$ *il suo tempo diventa* $10+10\times 4+8+3\times 2+10+10\times 4=114$*, uguale al tempo degli altri, che è peggiore del tempo senza la strada* $1-2$

La nuova soluzione è ancora un equilibrio di Nash

Ovviamente gli utenti potrebbero tornare alla configurazione precedente, che però adesso risulta instabile ♢

3 Strategie correlate

Esempio 3.1 (Gioco dell'incrocio)

I/II	P	F
P	$-10, -10$	$5, 0$
F	$0, 5$	$-1, -1$

Equilibri di Nash in strategie pure (P, F) *e* (F, P)

valore atteso 5 per chi passa e 0 per chi si ferma (somma 5)

incidente impossibile

Equilibrio di Nash in strategie miste $((\frac{3}{8}, \frac{5}{8}), (\frac{3}{8}, \frac{5}{8}))$

valore atteso $-\frac{5}{8}$ *per entrambi (somma* $-\frac{5}{4}$*)*

incidente possibile

Fermarsi comunque è la scelta più sicura ma ha un valore atteso negativo, salvo nel caso improbabile che l'altro passi comunque

Si può correlare la strategia ad un evento esterno: il semaforo

Ciclo semaforico al 50 per cento:

valore atteso 2.5 per entrambi (somma 5)

notevole sicurezza

♢

3.1 Equilibrio correlato

Definizione 3.1

- *Si dice strategia mista correlata per un gioco a due giocatori, una distribuzione di probabilità sul prodotto cartesiano di strategie, cioè una matrice P tale che:*

$$\sum_{i=1,...,n} \sum_{j=1,...,m} p_{ij} = 1$$
$$p_{ij} \geq 0 \qquad \forall i, \forall j$$

- *Si dice equilibrio correlato per un gioco a due giocatori a matrice doppia (A, B) una strategia mista correlata P tale che per ogni strategia σ_i del primo giocatore:*

$$\frac{\sum_{j=1,...,m} a_{ij} p_{ij}}{\sum_{j=1,...,m} p_{ij}} \geq \frac{\sum_{j=1,...,m} a_{hj} p_{ij}}{\sum_{j=1,...,m} p_{ij}} \qquad h = 1, ..., n$$

e per ogni strategia σ_j del secondo giocatore:

$$\frac{\sum_{i=1,...,n} b_{ij} p_{ij}}{\sum_{i=1,...,n} p_{ij}} \geq \frac{\sum_{i=1,...,n} b_{ik} p_{ij}}{\sum_{i=1,...,n} p_{ij}} \qquad k = 1, ..., m$$

dove $\frac{\sum_{j=1,...,m} a_{sj} p_{ij}}{\sum_{j=1,...,m} p_{ij}}$ è l'utilità attesa dal giocatore I se gioca la strategia σ_s quando gli viene "indicata" la strategia σ_i e il giocatore II "accetta" l'indicazione e $\frac{\sum_{i=1,...,n} b_{it} p_{ij}}{\sum_{i=1,...,n} p_{ij}}$ è l'utilità attesa dal giocatore II se gioca la strategia σ_t quando gli viene "indicata" la strategia σ_j e il giocatore I "accetta" l'indicazione

4 Informazione

4.1 Informazione perfetta e imperfetta

Tutte le informazioni sono *conoscenza comune*, cioè note a tutti i giocatori; in questo caso il gioco è detto a *informazione perfetta e completa*

Definizione 4.1 *Un gioco G si dice a informazione imperfetta se esiste almeno un insieme di informazione contenente più di un elemento*

L'informazione imperfetta richiede che nei nodi facenti parte dello stesso insieme di informazione il giocatore chiamato a giocare sia nella stessa identica situazione

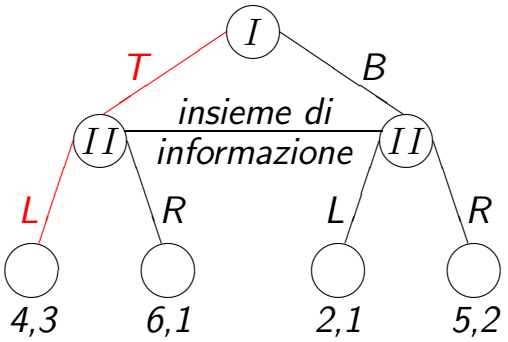
L'informazione può essere anche indiretta

Esempio 4.1 (Ruolo dell'informazione)

II gioca senza conoscere la scelta di I

T è la migliore strategia per I, qualunque sia la scelta di II (strategia dominante)

Quindi I gioca T e II gioca L; la vincita è 4 per I e 3 per II

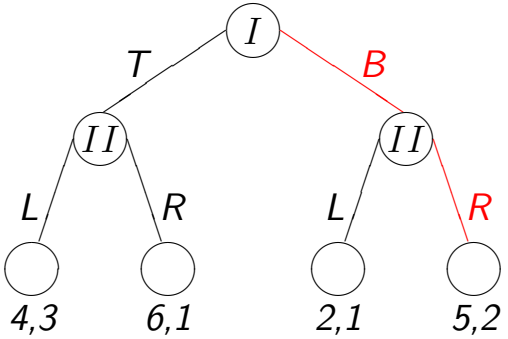


II gioca conoscendo la scelta di I

Se I gioca T II sceglie L con esito (4, 3)

Se I gioca B II sceglie R con esito (5, 2)

Quindi I gioca B e II gioca R; la vincita è 5 per I e 2 per II



L'aumento di informazione è per entrambi e I lo può sfruttare meglio di II ♢

4.2 Informazione incompleta

Esempio 4.2 (Tipi di giocatori)

Il giocatore I ha la possibilità di giocare contro due differenti tipi di avversari (giocatore II di tipo A o di tipo B) indicati come II_A e II_B, selezionati tramite un sorteggio noto ai giocatori II_A e II_B, ma non al giocatore I; tutti gli altri elementi sono invece noti a entrambi i giocatori E' possibile rappresentare questa situazione in forma strategica tramite due differenti matrici di payoff

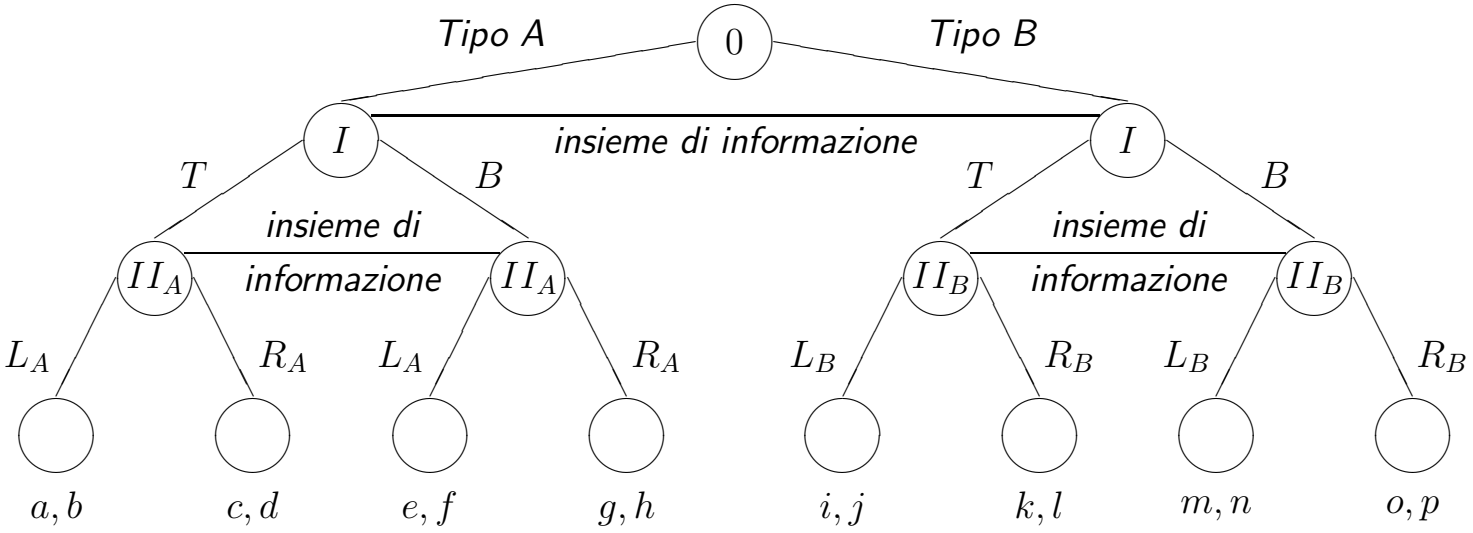
I/II_A	L_A	R_A
T	a, b	c, d
B	e, f	g, h

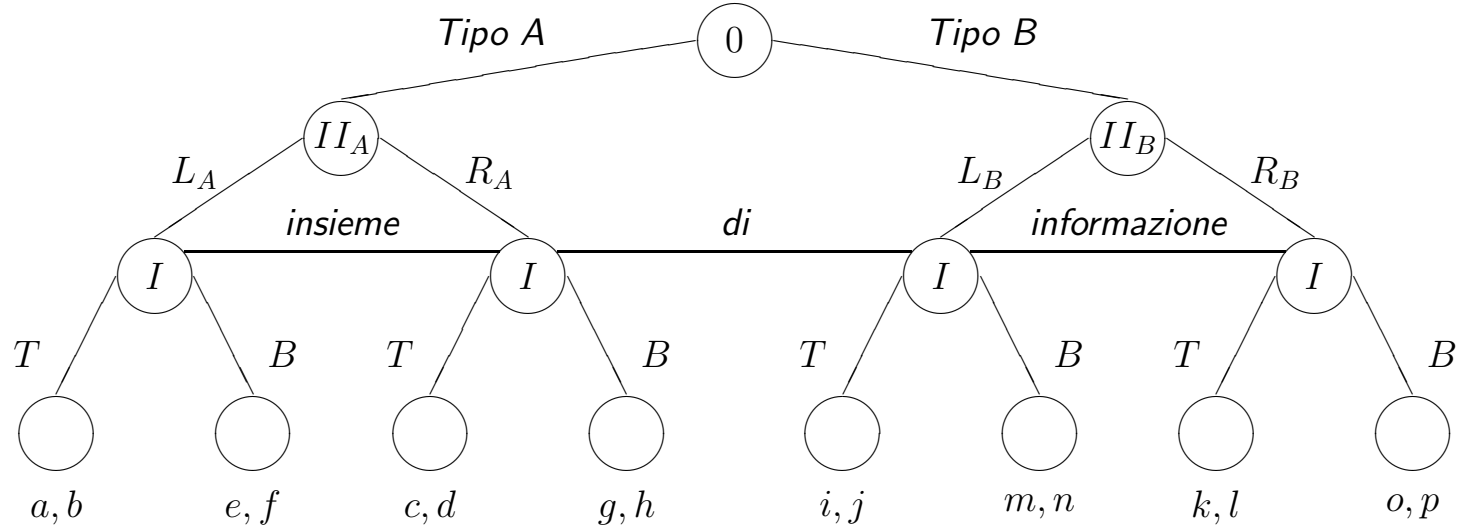
I/II_B	L_B	R_B
T	i, j	k, l
B	m, n	o, p

$\diamondsuit$

A questa situazione, introdotta da Harsanyi (1967-68) come *giochi bayesiani*, possono essere ricondotte altre situazioni di informazione incompleta
Questo approccio richiede la conoscenza della probabilità associata al tipo di giocatore
Si può ipotizzare l'esistenza di un terzo giocatore (il caso), indicato con 0 che sceglie quale matrice utilizzare, secondo una preassegnata probabilità
Il gioco è a informazione imperfetta poichè il giocatore I non conosce la mossa del caso
L'imperfezione dell'informazione si può estendere alla non conoscenza delle mosse effettuate dall'altro giocatore

L'importanza dell'approccio di Harsanyi sta nella semplicità della soluzione proposta


Tipo A
0
Tipo B
I
insieme di informazione
I
T
B
T
B
insieme di
insieme di
II_A
informazione
II_A
II_B
informazione
II_B
L_A
R_A
L_A
R_A
L_B
R_B
L_B
R_B
a, b
c, d
e, f
g, h
i, j
k, l
m, n
o, p


Tipo A
0
Tipo B
II_A
II_B
L_A
R_A
L_B
R_B
insieme
di
informazione
I
I
I
I
T
B
T
B
T
B
T
B
a, b
e, f
c, d
g, h
i, j
m, n
k, l
o, p

Formalmente un gioco bayesiano può essere rappresentato come una quintupla:

$$G^b = (N, \{C_i\}_{i \in N}, \{T_i\}_{i \in N}, \{p_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N})$$

dove N è l'insieme dei giocatori
C_i è l'insieme delle azioni possibili del giocatore i
T_i è l'insieme dei tipi del giocatore i
p_i sono le probabilità che il giocatore i assegna al tipo degli altri giocatori
$u_i : \prod_{j \in N} C_j \times \prod_{j \in N} T_j \to \mathbb{R}$ è la funzione di utilità del giocatore i

Gli elementi di C_i sono detti $azioni$ e non strategie perchè le strategie devono tenere conto di ogni possibile tipo del giocatore i; una strategia pura per il giocatore i è una funzione:

$$s_k^i : T_i \to C_i, \qquad s_k^i \in \Sigma_i$$

dove Σ_i è l'insieme delle strategie pure del giocatore i e una strategia mista è una funzione:

$$\sigma^i : C_i \times T_i \to [0, 1], \ con \sum_{c \in C_i} \sigma^i(c, t) = 1, \forall\ t \in T_i$$

La soluzione del gioco, detta *equilibrio bayesiano* o *equilibrio Nash-bayesiano*, viene determinata come un normale equilibrio di Nash di un gioco a informazione imperfetta

Esempio 4.3 (da Fudenberg - Tirole)

Un'impresa (giocatore I), già operante sul mercato, deve decidere se costruire una nuova fabbrica (C, NC); un'altra (giocatore II) deve decidere se entrare sul mercato (E, NE). Il giocatore II non sa se la costruzione della nuova fabbrica per I avrà costo 3 oppure 0 e assegna ai due eventi probabilità p e $1-p$, rispettivamente; il costo è invece noto a I; i payoff sono riportati nelle seguenti tabelle:

I_3/II	E	NE
C	$0, -1$	$2, 0$
NC	$2, 1$	$3, 0$

I_0/II	E	NE
C	$3, -1$	$5, 0$
NC	$2, 1$	$3, 0$

Il gioco bayesiano è rappresentato dalla quintupla:

$$N = \{I, II\}$$

$$C_I = \{C, NC\}; C_{II} = \{E, NE\}$$

$$T_I = \{I_3, I_0\}; T_{II} = \{II\}$$

$$p_{I_3}(II) = p_{I_0}(II) = 1; p_{II}(I_3) = p, p_{II}(I_0) = 1 - p$$

$$\begin{aligned}
&u_I((C,E),(I_3,II)) = 0 && u_{II}((C,E),(I_3,II)) = -1\\
&u_I((NC,E),(I_3,II)) = 2 && u_{II}((NC,E),(I_3,II)) = 1\\
&u_I((C,NE),(I_3,II)) = 2 && u_{II}((C,NE),(I_3,II)) = 0\\
&u_I((NC,NE),(I_3,II)) = 3 && u_{II}((NC,NE),(I_3,II)) = 0\\
&u_I((C,E),(I_0,II)) = 3 && u_{II}((C,E),(I_0,II)) = -1\\
&u_I((NC,E),(I_0,II)) = 2 && u_{II}((NC,E),(I_0,II)) = 1\\
&u_I((C,NE),(I_0,II)) = 5 && u_{II}((C,NE),(I_0,II)) = 0\\
&u_I((NC,NE),(I_0,II)) = 3 && u_{II}((NC,NE),(I_0,II)) = 0
\end{aligned}$$

Le strategie pure sono:

$\Sigma_I = \{s_1^I, s_2^I, s_3^I, s_4^I\}$ *con*

$$\begin{aligned} s_1^I(I_3) &= C & s_1^I(I_0) &= C \\ s_2^I(I_3) &= C & s_2^I(I_0) &= NC \\ s_3^I(I_3) &= NC & s_3^I(I_0) &= C \\ s_4^I(I_3) &= NC & s_4^I(I_0) &= NC \end{aligned}$$

$\Sigma_{II} = \{s_1^{II}, s_2^{II}\}$ *con*

$$\begin{aligned} s_1^{II}(II) &= E \\ s_2^{II}(II) &= NE \end{aligned}$$

L'azione NC *è dominante per il giocatore* I *se il costo è 3 e quindi il giocatore* II *sceglierà* E*, mentre se il costo è 0 l'azione* C *è dominante per il giocatore* I *e quindi il giocatore* II *sceglierà* NE

La strategia s_3^I *è quindi dominante*

Il giocatore II *sceglierà* E *se* $p > 0.5$ *e sceglierà* NE *se* $p < 0.5$

Se $p = 0.5$ *il payoff atteso del giocatore* II *è nullo, qualunque sia la sua strategia* $\diamondsuit$

5 Duopolio

Su un mercato economico le imprese possono assumere vari ruoli

monopolio: un'impresa è in grado di governare completamente il mercato, stabilendo autonomamente quantità da produrre e prezzo di vendita

oligopolio: poche imprese governano il mercato, ma devono ciascuna tenere conto delle altre e della richiesta del mercato stesso

concorrenza: nessuna impresa è in grado di attuare una propria politica, ma subisce le regole del mercato

Il caso dell'oligopolio è certamente quello più interessante dal punto di vista delle *interazioni strategiche* tra le imprese operanti; tra le varie situazioni la più semplice è il *duopolio*, in cui sul mercato operano solo due imprese

Per rendere la situazione più semplice dal punto di vista computazionale si suppone che le due imprese producano allo stesso costo un *unico bene identico* ed inoltre le funzioni di costo e domanda sono supposte lineari a tratti

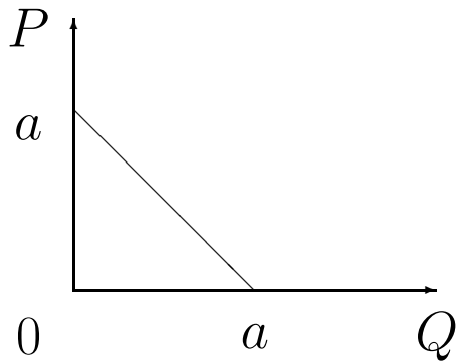
5.1 Il modello di Cournot - 1838

Due imprese, 1 e 2, devono decidere simultaneamente la quantità di bene da produrre, mentre il prezzo è una funzione (solitamente decrescente) della quantità complessiva prodotta e immessa sul mercato
Non ci sono costi fissi e il costo per produrre un'unità di bene è una costante strettamente positiva c, identica per le due imprese

Il prezzo per unità di bene dipende dalle quantità $Q = q_1 + q_2$ di bene che le imprese producono:

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q & se \quad Q \leq a \\ 0 & se \quad Q > a, \end{cases}$$

dove $a > c$ è una costante



Il profitto dell'impresa i è dato da:

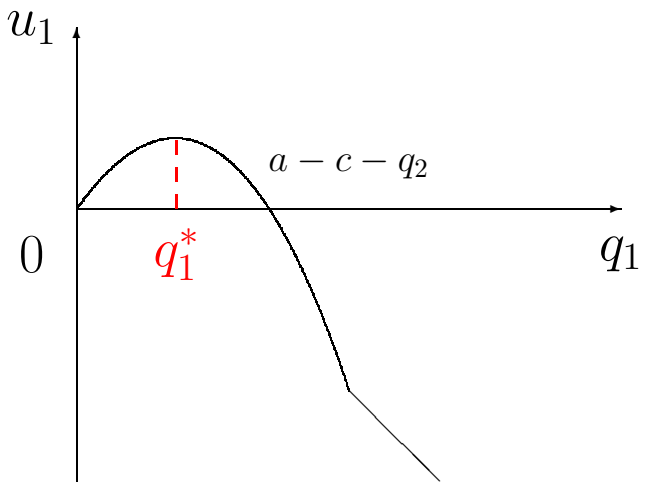
$$u_i(q_1, q_2) = P(Q)q_i - cq_i, \qquad i = 1, 2$$

Il caso $a \leq c$ è banale poichè le imprese sceglierebbero di non produrre

- Affinchè un'impresa realizzi un profitto non negativo è necessario che valga $P(Q) \geq c$, cioè $Q \leq a - c$
- Le quantità presenti in questa trattazione sono talvolta considerate solo come valore, trascurando la dimensione

Se la seconda impresa produce $q_2 \leq a - c$, la prima impresa deciderà di produrre la quantità q_1 che massimizza il suo profitto:

$$u_1(q_1, q_2) = (P(Q) - c)q_1 = \begin{cases} -q_1^2 + (a - c - q_2)q_1 & \text{se } q_1 \leq a - q_2 \\ -cq_1 & \text{se } q_1 > a - q_2. \end{cases}$$



La quantità ottimale per l'impresa 1 è $q_1^* = \dfrac{a - c - q_2}{2}$

Per la simmetria del problema la quantità ottimale per l'impresa 2 è $q_2^* = \dfrac{a - c - q_1}{2}$

Le quantità q_1^* e q_2^* possono essere determinate simultaneamente:

$$\begin{cases} q_1^* = \dfrac{a - c - q_2^*}{2} \\ q_2^* = \dfrac{a - c - q_1^*}{2} \end{cases}$$

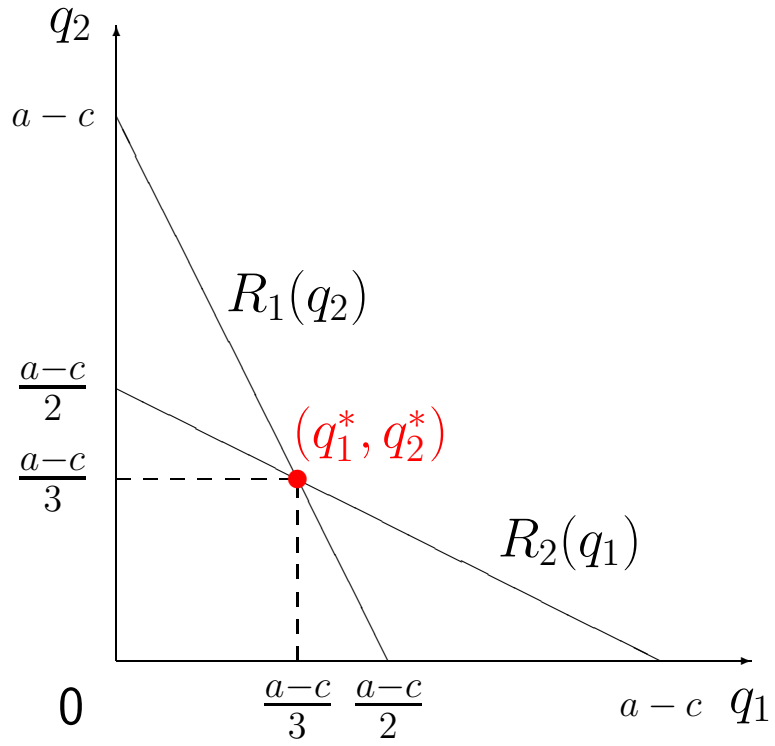
$q_1^* = q_2^* = \dfrac{(a - c)}{3}$

$P^* = \dfrac{(a + 2c)}{3}$

$u_1(q_1^*, q_2^*) = u_2(q_1^*, q_2^*) = \dfrac{(a - c)^2}{9}$

Il modello di Cournot può essere interpretato come un gioco in cui i giocatori sono le due imprese, le strategie sono le quantità che ciascuna impresa può produrre e le funzioni di utilità delle imprese coincidono con le funzioni di profitto

In questa situazione q_1^* e q_2^* sono la *miglior risposta di un'impresa alla strategia dell'altra*, cioè costituiscono un equilibrio di Nash detto *equilibrio di Cournot*

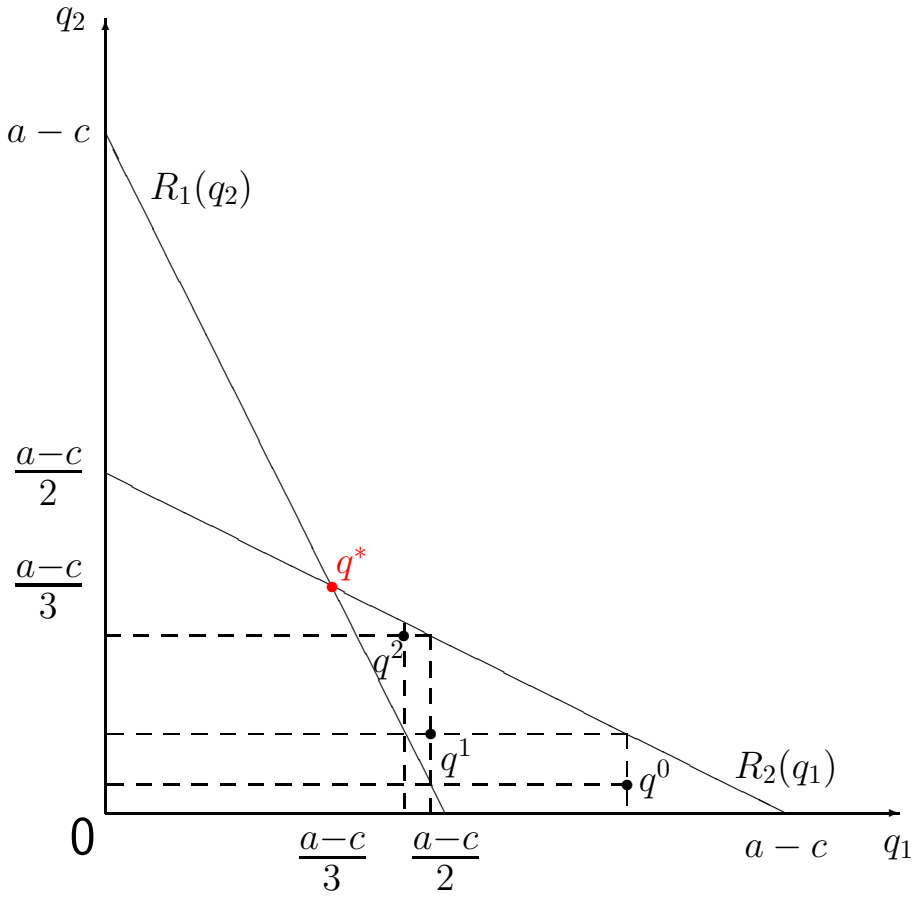


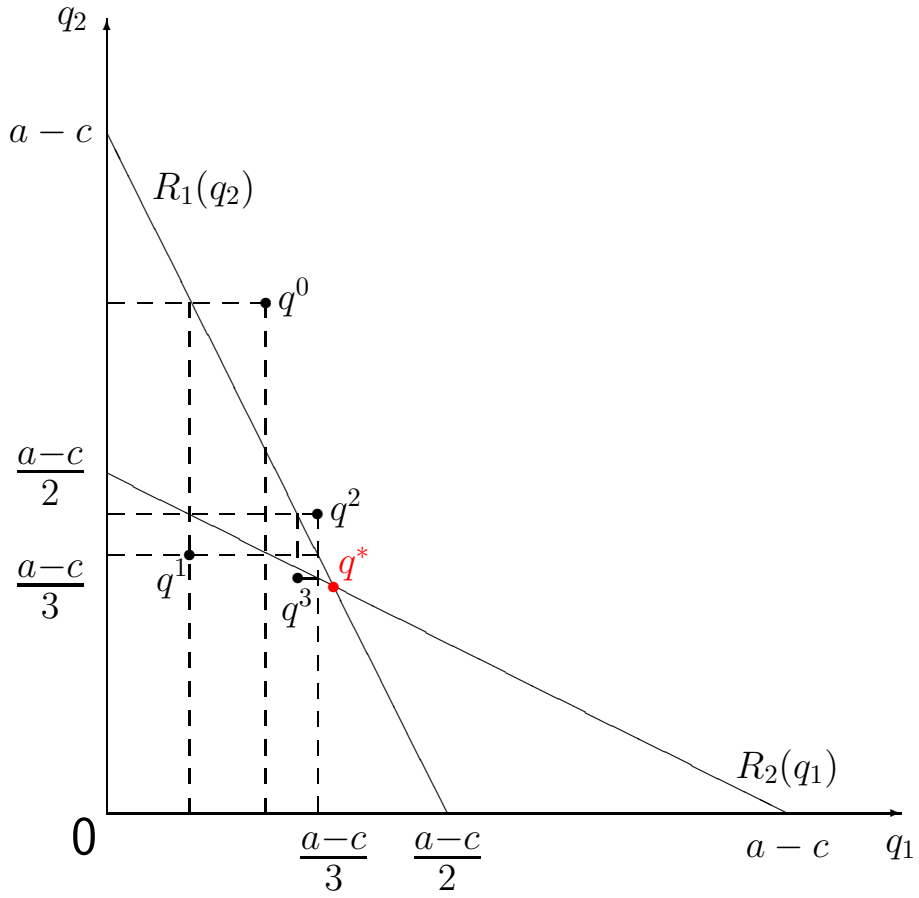
5.2 Soluzione dinamica (Best-reply)

I valori di q_1^* e q_2^* non richiedono un accordo tra le due imprese

Siano q_1^0 e q_2^0 le quantità arbitrarie prodotte al tempo t_0
Al tempo t_1 ciascuna impresa sceglie la miglior risposta alla scelta precedente dell'impresa concorrente, cioè $q_1^1 = \frac{a-c-q_2^0}{2}$ e $q_2^1 = \frac{a-c-q_1^0}{2}$
In generale al tempo t_n si ha $q_1^n = \frac{a-c-q_2^{n-1}}{2}$ e $q_2^n = \frac{a-c-q_1^{n-1}}{2}$
Inoltre

$$\lim_{n\to+\infty} q_1^n = \lim_{n\to+\infty} q_2^n = \frac{(a-c)}{3}$$





Il risultato può essere ottenuto anche supponendo che ad ogni stadio solo una delle due imprese, alternativamente, ridetermini la sua produzione ottimale sulla base della produzione dell'altra nello stadio precedente

5.3 Il modello di Bertrand - 1883

Le due imprese decidono, indipendentemente e simultaneamente, i prezzi del loro prodotto, mentre la quantità di bene prodotta è tale da soddisfare la domanda che dipende dal prezzo fissato
Come nel modello di Cournot, non esistono costi fissi di produzione e il costo di produzione unitario, uguale per le due imprese, è c

I prodotti delle due imprese sono indistinguibili e il consumatore sceglie solo in base al prezzo
Detti p_1 e p_2 i prezzi scelti e $P = \min\{p_1, p_2\}$, la domanda, in funzione del prezzo è data da

$$D(P) = \begin{cases} a - P & \text{se } 0 \leq P \leq a \\ 0 & \text{se } P > a \end{cases}$$

dove $a > c$ è il prezzo massimo che i consumatori sono disposti a pagare

Se le due imprese scelgono lo stesso prezzo, si dividono il mercato a metà
Altrimenti l'impresa che fissa il prezzo più alto non ha richiesta e quindi non produce e l'altra soddisfa tutta la richiesta del mercato

Le funzioni di utilità per le due imprese sono:

$$u_1(p_1, p_2) = \begin{cases} (p_1 - c)(a - p_1)_+ & \text{se } p_1 < p_2 \\ \dfrac{(p_1 - c)(a - p_1)_+}{2} & \text{se } p_1 = p_2 \\ 0 & \text{se } p_1 > p_2 \end{cases}$$

$$u_2(p_1, p_2) = \begin{cases} (p_2 - c)(a - p_2)_+ & \text{se } p_2 < p_1 \\ \dfrac{(p_2 - c)(a - p_2)_+}{2} & \text{se } p_1 = p_2 \\ 0 & \text{se } p_2 > p_1 \end{cases}$$

Questa situazione può essere vista come *pura concorrenza*, quindi l'unico prezzo che garantisce il massimo guadagno è $p_1 = p_2 = c$:

- se $p_i < c, i = 1, 2$ l'impresa i produce in perdita
- se $p_i > c, i = 1, 2$, l'altra può conquistare tutto il mercato fissando un prezzo inferiore

Si potrebbe pensare che il risultato del modello sia assurdo in quanto se $p_1 = p_2 = c$ entrambe le imprese non realizzano alcun profitto
Nella realtà la pura concorrenza non si verifica mai e in ogni caso il valore di c non è il mero costo di produzione, ma tiene conto di tutti i costi connessi, compresa la distribuzione e un guadagno minimo che giustifichi l'esistenza dell'impresa

Anche il modello di Bertrand può essere interpretato come un gioco in cui i giocatori sono le due imprese, le strategie sono i prezzi possibili e le funzioni di utilità sono date dalle funzioni di profitto

E' facile verificare che i prezzi $p_1 = p_2 = c$ costituiscono l'unico equilibrio di Nash detto *equilibrio di Bertrand*

(c, c) è equilibrio di Nash

Se un'impresa fissa il prezzo c, l'altra impresa non ha risposte migliori di c, in quanto se sceglie un prezzo inferiore ottiene un payoff negativo, mentre se ne fissa uno maggiore, ottiene comunque un'utilità nulla

(c, c) è l'unico equilibrio di Nash

Nessun altro punto $(\bar{p}_1, \bar{p}_2) \neq (c, c)$ è di equilibrio, infatti:

- se il minore dei due prezzi è strettamente minore di c, l'impresa che lo ha fissato ottiene un'utilità negativa, e può incrementarla fissando il prezzo c
- se il minore dei due prezzi è maggiore o uguale di c e i prezzi sono diversi, l'impresa che lo ha fissato può incrementare la sua utilità fissando un prezzo leggermente più alto
- se i prezzi sono uguali e strettamente maggiori di c, ciascuna impresa può aumentare la sua utilità riducendo leggermente il prezzo

Questo risultato è noto come *paradosso di Bertrand*

5.4 Il modello di Stackelberg - 1934

Ciascuna impresa deve decidere la quantità da produrre, ma le due imprese agiscono in tempi differenti
L'impresa 1 è dominante (*leader*) e muove per prima
L'impresa 2 è subordinata (*follower*) e muove per seconda

L'impresa leader fissa la sua quantità ottimale q_1^* e l'impresa follower decide la sua quantità ottimale q_2^* sulla base della scelta dell'impresa 1
La quantità $Q = q_1^* + q_2^*$ determina il prezzo

L'impresa 1, sa di essere dominante e sa anche che l'impresa 2 fisserà la sua produzione q_2^* conoscendo la scelta q_1^*, quindi nel decidere il valore di q_1^* l'impresa leader terrà conto della succesiva scelta dell'impresa follower

Per semplicità e per poter fare un confronto, la funzione di prezzo sia:

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q & se \quad Q \leq a \\ 0 & se \quad Q > a, \end{cases}$$

e il profitto dell'impresa i sia:

$$u_i(q_1, q_2) = P(Q)q_i - cq_i, \qquad i = 1, 2$$

Se l'impresa 1 produce la quantità q_1, la produzione ottimale per l'impresa 2 è:

$$q_2^* = \frac{a - c - q_1}{2}$$

e quindi l'impresa 1 produrrà la quantità:

$$\begin{aligned} q_1^* &= argmax\ u_1(q_1, q_2^*) = argmax\ \left\{ q_1 \left(a - q_1 - \frac{a - c - q_1}{2} \right) - cq_1 \right\} \\ &= argmax\ \left\{ -\frac{1}{2} q_1^2 + \frac{a - c}{2} q_1 \right\} = \frac{a - c}{2} \end{aligned}$$

da cui si ricava:

$$q_2^* = \frac{a - c}{4}$$

$$P^* = \frac{a + 3c}{4}$$

$$u_1(q_1^*, q_2^*) = \frac{(a - c)^2}{8};\ u_2(q_1^*, q_2^*) = \frac{(a - c)^2}{16}$$

Anche il modello di Stackelberg può essere interpretato come un gioco in cui i giocatori, le strategie e le funzioni di utilità sono le stesse del modello di Cournot
La variante è che il gioco è a informazione perfetta, per cui l'esito si può ricavare con l'induzione a ritroso

Anche in questo caso, la soluzione ottenuta costituisce un equilibrio di Nash detto *equilibrio di Stackelberg*

5.5 Confronto tra i modelli

Per completezza si consideri il caso di monopolio
Utilizzando le stesse funzioni di prezzo e di profitto si ha:

$$Q^* = argmax\ u(Q) = argmax\ \{(a - Q)Q - cQ\} = \frac{a - c}{2}$$

$$P^* = \frac{a + c}{2}$$

$$U(Q^*) = \frac{(a - c)^2}{4}$$

Si può ipotizzare che le due imprese si accordino tra di loro, gestendo la produzione, i prezzi e il mercato come se fossero in regime di monopolio, ad esempio dividendo equamente la produzione e conseguentemente i profitti, in un *monopolio alla Cournot*

$$P^* = \frac{a + c}{2}$$

$$q_1^* = q_2^* = \frac{a - c}{4}$$

$$u_1(q_1^*, q_2^*) = u_2(q_1^*, q_2^*) = \frac{(a - c)^2}{8}$$

	duopolio di Cournot (i)	duopolio di Bertrand (ii)	duopolio di Stackelberg (iii)	monopolio alla Cournot (iv)
produzione	$q_1^* = \frac{a-c}{3}$ $q_2^* = \frac{a-c}{3}$	$q_1^* = \frac{a-c}{2}$ $q_2^* = \frac{a-c}{2}$	$q_1^* = \frac{a-c}{2}$ $q_2^* = \frac{a-c}{4}$	$q_1^* = \frac{a-c}{4}$ $q_2^* = \frac{a-c}{4}$
profitto	$\frac{(a-c)^2}{9}$ $\frac{(a-c)^2}{9}$	0 0	$\frac{(a-c)^2}{8}$ $\frac{(a-c)^2}{16}$	$\frac{(a-c)^2}{8}$ $\frac{(a-c)^2}{8}$
prezzo	$\frac{a+2c}{3}$	c	$\frac{a+3c}{4}$	$\frac{a+c}{2}$

La produzione complessiva ha il seguente ordine decrescente:

$$ii - iii - i - iv$$

Il profitto complessivo ha il seguente ordine decrescente:

$$iv - i - iii - ii$$

Il prezzo ha il seguente ordine decrescente (ricordando che $a > c$):

$$iv - i - iii - ii$$

	duopolio di Cournot (i)	duopolio di Bertrand (ii)	duopolio di Stackelberg (iii)	monopolio alla Cournot (iv)
produzione	$q_1^* = \frac{a-c}{3}$ $q_2^* = \frac{a-c}{3}$	$q_1^* = \frac{a-c}{2}$ $q_2^* = \frac{a-c}{2}$	$q_1^* = \frac{a-c}{2}$ $q_2^* = \frac{a-c}{4}$	$q_1^* = \frac{a-c}{4}$ $q_2^* = \frac{a-c}{4}$
profitto	$\frac{(a-c)^2}{9}$ $\frac{(a-c)^2}{9}$	0 0	$\frac{(a-c)^2}{8}$ $\frac{(a-c)^2}{16}$	$\frac{(a-c)^2}{8}$ $\frac{(a-c)^2}{8}$
prezzo	$\frac{a+2c}{3}$	c	$\frac{a+3c}{4}$	$\frac{a+c}{2}$

La situazione *socialmente* migliore è il duopolio di Bertrand, o in generale la libera concorrenza (massima disponibilità del bene al prezzo minimo)
la situazione *socialmente* peggiore è il monopolio alla Cournot, o in generale il monopolio (minima disponibilità del bene al prezzo massimo)
il duopolio di Stackelberg è *socialmente* preferibile al duopolio di Cournot in quanto la disponibilità del bene è maggiore e il prezzo è minore

	duopolio di Cournot (i)	duopolio di Bertrand (ii)	duopolio di Stackelberg (iii)	monopolio alla Cournot (iv)
produzione	$q_1^* = \frac{a-c}{3}$ $q_2^* = \frac{a-c}{3}$	$q_1^* = \frac{a-c}{2}$ $q_2^* = \frac{a-c}{2}$	$q_1^* = \frac{a-c}{2}$ $q_2^* = \frac{a-c}{4}$	$q_1^* = \frac{a-c}{4}$ $q_2^* = \frac{a-c}{4}$
profitto	$\frac{(a-c)^2}{9}$ $\frac{(a-c)^2}{9}$	0 0	$\frac{(a-c)^2}{8}$ $\frac{(a-c)^2}{16}$	$\frac{(a-c)^2}{8}$ $\frac{(a-c)^2}{8}$
prezzo	$\frac{a+2c}{3}$	c	$\frac{a+3c}{4}$	$\frac{a+c}{2}$

Dal punto di vista delle imprese:

- il monopolio alla Cournot garantisce ad entrambe il profitto massimo (quindi la soluzione di Cournot è inefficiente) ma non risulta stabile
  Se l'impresa 1 produce $\frac{a-c}{4}+\varepsilon$ il prezzo scende a $\frac{a+c}{2}-\varepsilon$ e il suo profitto è $\frac{(a-c)^2}{8}+\frac{a-c}{4}\varepsilon-\varepsilon^2$ che risulta maggiore se $\varepsilon < \frac{a-c}{4}$; per $\varepsilon = \frac{a-c}{4}$ si ottiene la soluzione di Stackelberg

5.6 Il modello di Hotelling - 1929

Include anche l'aspetto spaziale

I due agenti producono un unico identico bene e devono decidere dove collocarsi per vendere il loro prodotto
A parità di prezzo i consumatori si recheranno dall'agente più vicino
Il mercato è rappresentato dal segmento $[0, 1]$ e i consumatori sono uniformemente distribuiti lungo il segmento stesso
L'esempio più classico è quello di due gelatai che devono decidere dove collocarsi lungo una spiaggia

Nella soluzione ottimale gli agenti si collocano entrambi nel punto $\frac{1}{2}$

Uno ottiene il segmento $[0, \frac{1}{2}]$ e l'altro il segmento $[\frac{1}{2}, 1]$

Questa soluzione è stabile (*equilibrio di Hotelling*)

- Se un agente si colloca nel punto $\frac{1}{2}+2\varepsilon$ e l'altro nel punto $\frac{1}{2}$, lui ottiene il segmento $[\frac{1}{2}+\varepsilon, 1]$ e l'altro il segmento $[0, \frac{1}{2}+\varepsilon]$
- Se un agente si colloca nel punto $\frac{1}{2}-2\varepsilon$, lui ottiene il segmento $[0, \frac{1}{2}-\varepsilon]$ e l'altro il segmento $[\frac{1}{2}-\varepsilon, 1]$.

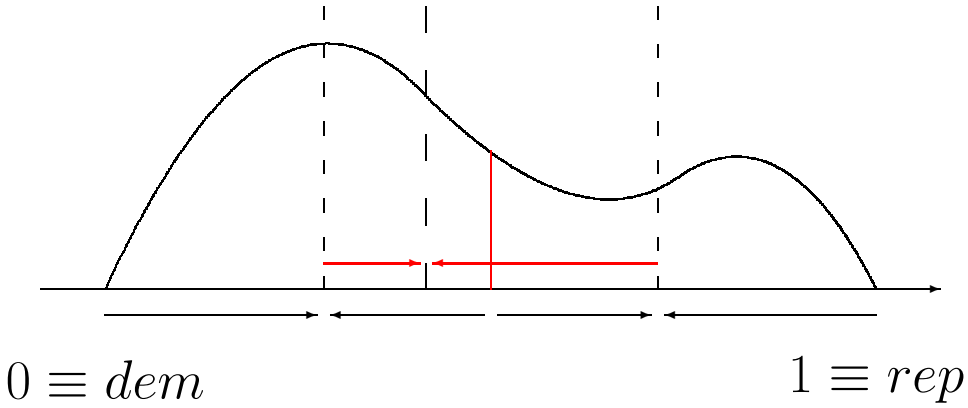
- Questa soluzione è socialmente inefficiente in quanto per i consumatori l'agente più vicino è ad una distanza media di $\frac{1}{4}$

  La soluzione efficiente è che un agente si collochi nel punto $\frac{1}{4}$ e l'altro nel punto $\frac{3}{4}$, poichè in questo caso l'agente più vicino è ad una distanza media di $\frac{1}{8}$

  Anche in questo caso un agente ottiene il segmento $[0, \frac{1}{2}]$ e l'altro il segmento $[\frac{1}{2}, 1]$, ma questa soluzione non è stabile.

- Questo modello permette di rappresentare il comportamento dei candidati nei sistemi elettorali bipolari, ad esempio l'elezione del presidente degli Stati Uniti

  Il segmento rappresenta le posizioni degli elettori sull'asse *Democratici-Repubblicani* e i due agenti sono i candidati che cercano di collocarsi al centro (*rush for the middle*), tenendo conto che la distribuzione degli elettori non è uniforme



5.7 Duopolio con prodotti differenziati (Morgan and Shy, 1996)

Come nel duopolio di Bertrand, due negozi devono fissare il prezzo di due prodotti simili, ma non identici, cercando di massimizzare il rispettivo profitto, sfruttando il fatto che alcuni clienti preferiscono un prodotto rispetto all'altro

I costi di produzione sono nulli
I consumatori sono divisi in due gruppi, $\eta_A > 0$ di tipo A (che preferiscono il bene del negozio A) e $\eta_B > 0$ di tipo B (che preferiscono il bene del negozio B)
Ogni consumatore acquista un'unità di bene o dal negozio A o dal negozio B

Siano p_A e p_B i prezzi dei negozi e sia $\delta \geq 0$ il costo fisso di un consumatore se acquista il bene meno preferito. Ad esempio δ può essere visto come un costo di trasporto
Le utilità dei consumatori di tipo A e B sono:

$$U_A = \begin{cases} -p_A & \text{se acquista da } A \\ -p_B - \delta & \text{se acquista da } B \end{cases}$$

$$U_B = \begin{cases} -p_B & \text{se acquista da } B \\ -p_A - \delta & \text{se acquista da } A \end{cases}$$

Siano q_A e q_B il numero di consumatori che acquistano dal negozio A e B, dove:

$$q_A = \begin{cases} 0 & \text{se } p_A > p_B + \delta \\ \eta_A & \text{se } p_B - \delta \leq p_A \leq p_B + \delta \\ \eta_A + \eta_B & \text{se } p_A < p_B - \delta \end{cases}$$

$$q_B = \begin{cases} 0 & \text{se } p_B > p_A + \delta \\ \eta_B & \text{se } p_A - \delta \leq p_B \leq p_A + \delta \\ \eta_A + \eta_B & \text{se } p_B < p_A - \delta \end{cases}$$

Un equilibrio di Bertrand è una coppia (p_A^N, p_B^N) che massimizza il profitto di entrambi i negozi

Proposizione 5.1 *Non esiste un equilibrio di Bertrand in strategie pure per il modello con prodotti differenziati*

Dimostrazione. Per assurdo, sia (p_A^N, p_B^N) un equilibrio di Bertrand. Si possono avere tre casi:

(1) $|p_A^N - p_B^N| > \delta$. Sia $p_A^N > p_B^N + \delta$, per cui $q_A^N = 0$ e quindi $\pi_A^N = 0$. Allora il negozio A può aumentare il suo profitto riducendo il prezzo a $\hat{p}_A < p_B^N + \delta$; in questo caso $\hat{q}_A = \eta_A$ e $\hat{\pi}_A = \eta_A \hat{p}_A > 0$. Assurdo.

(2) $|p_A^N - p_B^N| < \delta$. Sia $p_A^N < p_B^N + \delta$. Allora il negozio A può aumentare il suo profitto aumentando il prezzo a $p_A^N < \hat{p}_A < p_B^N + \delta$; in questo caso $\hat{\pi}_A = \eta_A \hat{p}_A > \pi_A^N$. Assurdo.

(3) $|p_A^N - p_B^N| = \delta$. Sia $p_A^N = p_B^N - \delta$. Allora il negozio A può aumentare il suo profitto aumentando il prezzo a $\hat{p}_A < p_B^N + \delta$. Assurdo.

E' possibile definire un differente equilibrio (Undercut-proof equilibrium)

Definizione 5.1 *Il negozio i vende sottocosto rispetto al negozio j, se $p_i \leq p_j - \delta$, dove $i, j = A, B,\ i \neq j$.*

Il termine sottocosto indica che un negozio riduce il proprio prezzo al livello dell'altro meno il sovraccosto δ
In altre parole nel sottocosto un negozio si "assume" il sovraccosto δ

Definizione 5.2 *Un Undercut-Proof equilibrium (UPE) è una coppia* (p_A^U, p_B^U) *per cui:*

(a) dati p_B^U *e* q_B^U*, il negozio* A *sceglie il più alto prezzo* p_A^U *tale che*

$$\pi_B^U = p_B^U q_B^U \geq (p_A - \delta)(\eta_A + \eta_B)$$

(b) dati p_A^U *e* q_A^U*, il negozio* B *sceglie il più alto prezzo* p_B^U *tale che*

$$\pi_A^U = p_A^U q_A^U \geq (p_B - \delta)(\eta_A + \eta_B)$$

(c) La scelta dei consumatori è regolata come precedentemente detto

Ogni negozio fissa il prezzo più alto che non riduce il profitto dell'altro, anche se vendesse sottocosto acquisendo tutti i clienti $\eta_A + \eta_B$

Le precedenti disequazioni, risolte come equazioni forniscono i prezzi di equilibrio:

$$p_A^U = \frac{(\eta_A + \eta_B)(\eta_A + 2\eta_B)\delta}{(\eta_A^2 + \eta_A\eta_B + \eta_B^2)}$$

$$p_B^U = \frac{(\eta_A + \eta_B)(2\eta_A + \eta_B)\delta}{(\eta_A^2 + \eta_A\eta_B + \eta_B^2)}$$

Fissando il prezzo di equilibrio (maggiore di δ) ciascun negozio si assicura una quota non negativa di mercato e di profitto, senza correre rischi

Per sostituzione si ricava $q_A^U = \eta_A$ e $q_B^U = \eta_B$

Quattro importanti proprietà dell'UPE

- I prezzi aumentano con il sovraccosto δ e tendono a zero se δ tende a zero, come nella situazione di bene omogeneo (Bertrand)
- $p_B^U \geq p_A^U$ se e solo se $\eta_A \geq \eta_B$
  All'equilibrio, il negozio con un maggior numero di clienti ha il prezzo più basso
  Questo risultato è classico per i discount che hanno un numero elevato di clienti
- $\pi_B^U \geq \pi_A^U$ se e solo se $\eta_B \geq \eta_A$
  All'equilibrio, il negozio con un maggior numero di clienti ha il profitto più alto, nonostante il prezzo più basso
- Se la distribuzione dei clienti è simmetrica, $\eta_A = \eta_B$, i prezzi di equilibrio sono $p_A^U = p_B^U = 2\delta$

6 Aste

Un asta è un meccanismo di vendita flessibile ed efficiente per un mercato bilaterale
Solo una delle due parti ha un ruolo attivo, mentre l'altra è passiva

Un'asta può essere usata sia per vendere che per comprare (*reverse auction*)
Un'asta per comprare è del tutto identica ad un'asta per vendere, a meno di rovesciare ruoli e definizioni

Il venditore stabilisce le regole, scegliendo il tipo di asta
Un'asta richiede che ci sia carenza dei beni venduti e che gli acquirenti siano in competizione

Breve storia

- La prima asta di cui si ha notizia certa fu tenuta a Babilonia nel 500 A.C. per "assegnare" ragazze a possibili mariti (le donne senza bellezza pagarono per entrare nell'asta)
- Nell'antica Roma le aste erano molto comuni per vendere gli schiavi e altri bottini di guerra (il termine "asta" deriva dall'abitudine romana di piantare un'asta nel luogo dove si svolgeva la vendita e l'inglese "auction" deriva dal latino "augere" = aumentare)
- L'impero romano fu venduto all'asta nel 193 D.C. dalle guardie del pretorio dopo aver ucciso l'imperatore Pertinace
  Il vincitore, Didio Giuliano, fu decapitato due mesi dopo dalle stesse guardie quando Settimio Severo conquistò Roma (un eccellente esempio della *rovina del vincitore*)
- La prima casa d'aste, la Stockholms Auktionwerk, nacque nel 1674
- Nel 1744 fu la volta di Sotheby's, seguita da Christie's nel 1766

Le aste sono molto diffuse, ma il loro meccanismo esatto può essere molto complesso
Non ci sono regole da rispettare, tranne che ogni dettaglio deve essere reso noto ai partecipanti prima dell'asta

Un esempio delle possibilità offerte da un'asta è la cosidetta *one dollar auction* (Shubik, 1971)

Un capitolo a parte sono le aste su web

Agenti di un'asta

- banditore (*auctioneer*)
- venditore (*seller*, spesso è lo stesso banditore)
- acquirenti o offerenti (*buyers*, *bidders*)

Caratteristiche di un'asta

* Numero di oggetti:
  - uno
  - molti
    - ogni vincitore ottiene un solo oggetto
    - un vincitore può ottenere più oggetti
* Regole d'asta:
  - ammissione
    - aperta
    - chiusa
  - offerta
    - gridata
    - in busta chiusa
    - prezzo di riserva *reserve price*
  - vincitore
    - miglior offerente
    - miglior offerente con offerta unica
    - peggior offerente con offerta unica
    - ...
* Regole di pagamento:
  - un solo pagante per ogni oggetto
    - primo prezzo
    - secondo prezzo
  - più paganti per ogni oggetto
    - molti
    - tutti

Le aste sono diffuse quando non esiste in prezzo di mercato e/o la "qualità" del bene è incerta

- Vini
- Quadri
- Fiori
- Pesce
- Obbligazioni
- Diritti di trivellazione
- Prestiti e mutui a rischio incerto
- ...

- *Valore privato - Private value*
  Ciascun acquirente conosce la propria valutazione del bene che è una sua informazione privata; la valutazione è *indipendente* da quelle degli altri acquirenti
  Il valore del bene è legato all'utilità di possederlo (valore duale)

- *Valore comune - Common value*
  Alla fine dell'asta il bene ha lo stesso valore per tutti gli acquirenti, ma all'inizio dell'asta lo si può solo stimare utilizzando informazioni *private* differenti o *segnali*
  Il valore del bene deriva dall'utilità di rivenderlo

Perchè usare un meccanismo d'asta?

- Permette di vendere un oggetto o un bene ad un prezzo elevato anche se il venditore non ha alcuna idea del suo valore reale, spesso abbreviando i tempi della trattativa
- Il prezzo viene fissato dagli acquirenti che possono avere informazioni migliori sul valore reale del bene, ma il venditore può cautelarsi fissando un prezzo di riserva
- Un opportuno meccanismo d'asta può difendere un venditore debole o massimizzare il profitto di un venditore forte
- Il venditore può accrescere e migliorare le sue informazioni sul valore reale dell'oggetto

Qual'è il meccanismo d'asta migliore?

I punti di vista del venditore e degli acquirenti sono solitamente differenti, con qualche aspetto in comune

Entrambi tengono conto di:

- tempo (fiori, pesce, merci deperibili)
- possibilità di colludere (*ring*)
- necessità di essere presenti

6.1 Tipi d'asta

Asta inglese

E' il modello d'asta più diffuso; è detta anche *asta aperta gridata* o *asta ascendente*
Il banditore propone un prezzo di apertura e gli acquirenti rilanciano con offerte crescenti, con aumenti prefissati o liberi
L'oggetto viene assegnato al miglior offerente che paga la sua offerta, a meno che non ci sia un prezzo di riserva più alto o altri diritti (*state right*)
Il banditore ha un ruolo molto importante nel sollecitare ulteriori offerte
E' necessaria la presenza degli acquirenti, o almeno di un rappresentante
La competizione e l'entusiasmo possono trascinare il prezzo verso l'alto

Variante
Il prezzo cresce continuamente e gli acquirenti possono ritirarsi, pubblicamente o meno, in qualunque momento e successivamente possono rientrare o no

Asta olandese

Il nome deriva dal fatto di essere utilizzata per la vendita dei fiori nei Paesi Bassi; è detta anche *asta discendente*

Viene utilizzata anche nei mercati all'ingrosso del pesce

Un contatore scende rapidamente e quando un acquirente accetta il prezzo arresta il contatore mettendo fine all'asta; l'oggetto gli viene assegnato al prezzo indicato

L'intera procedura richiede pochi secondi

E' necessaria la presenza degli acquirenti, o almeno di un rappresentante che però ha un ruolo molto semplice

http://www.youtube.com/watch?v=SfCSk93UY3M
http://www.youtube.com/watch?v=g0mViWsiTWg

Asta in busta chiusa al primo prezzo

Ogni acquirente fa un'offerta in busta chiusa (o qualcosa di simile); le offerte possono essere effettivamente simultanee o pervenire entro una scadenza prefissata

All'apertura delle buste l'oggetto viene assegnato al miglior offerente che paga il prezzo indicato

E' possibile che si verifichi la rovina del vincitore

L'intera procedura può richiedere anche mesi

Non è necessaria la presenza degli acquirenti

Asta in busta chiusa al secondo prezzo o *asta Vickrey*

Prende nome da William Vickrey, premio Nobel nel 1996 (Vickrey, 1961)

Questo meccanismo è simile al precedente, ma il vincitore paga la seconda offerta più alta

L'importanza di quest'asta e l'assegnazione del premio Nobel dipende dal fatto di incentivare la dichiarazione della valutazione reale

Offrire la valutazione reale è una strategia debolmente dominante (Milgrom, 1989)

Con un'offerta inferiore l'acquirente può perdere il bene ad un prezzo inferiore alla sua valutazione; con un'offerta superiore l'acquirente può ottenere il bene ad un prezzo maggiore della sua valutazione

6.2 Equivalenze

L'asta inglese è (quasi) equivalente all'asta Vickrey
L'asta olandese è equivalente all'asta in busta chiusa al primo prezzo

Revenue Equivalence Theorem - RET (vedi Klemperer, 2004)
Supponendo che ogni potenziale acquirente di un oggetto sia neutrale al rischio risk-neutral *e abbia un segnale privato, tratto indipendentemente da una distribuzione di probabilità non atomica, comune e strettamente crescente, allora ogni meccanismo d'asta per cui:*

(i) l'oggetto viene sempre assegnato all'acquirente con il segnale maggiore

(ii) ogni acquirente con il minimo segnale ammissible ha un surplus atteso nullo

ha lo stesso valore atteso (e ogni offerente ha la stessa vincita attesa come funzione del suo segnale)

Le ipotesi del teorema sono difficilmente soddisfatte per cui ha senso chiedersi quale meccanismo risulti migliore

6.3 Strategie d'asta

Molti elementi possono influenzare il risultato di un'asta

- l'atteggiamento verso il rischio (*risk-aversion, risk-neutrality, risk-propension*)
- il valore privato o comune
- le informazioni, in particolare l'*asimmetria informativa*

In teoria

- se gli offerenti hanno valore comune (le ipotesi di RET non sono soddisfatte) si ha il seguente ordinamento decrescente: asta inglese, asta Vickrey e asta olandese e asta in busta chiusa al primo prezzo alla pari, secondo la capacità di generare informazione
- se gli offerenti hanno valore privato ma sono avversi al rischio (le ipotesi di RET non sono soddisfatte) l'asta olandese e l'asta in busta chiusa al primo prezzo danno lo stesso risultato, maggiore di quello dell'asta inglese e dell'asta Vickrey che danno un uguale risultato (l'avversione al rischio genera offerte più alte poichè gli acquirenti temono di perdere l'oggetto)

Strategie d'asta per gli offerenti

- *Asta inglese*
  L'acquirente dovrebbe offrire appena di più dell'ultima offerta, fino a raggiungere la sua valutazione e poi ritirarsi
- *Asta olandese*
  L'acquirente può solo fermare il contatore al raggiungimento della sua valutazione
- *Asta in busta chiusa al primo prezzo*
  L'acquirente deve cercare un compromesso tra un maggior profitto (offerta più bassa) e una maggiore possibilità di vincere (offerta più alta)
- *Asta Vickrey*
  Secondo il risultato di Milgrom, l'acquirente può solo offrire la sua valutazione

6.4 Rovina del vincitore

Ogni vincitore pensa che se gli altri acquirenti hanno fatto offerte minori allora il valore del bene potrebbe essere inferiore
Nel caso dell'asta olandese e dell'asta in busta chiusa al primo prezzo c'è il dubbio che si poteva ottenere il bene ad un prezzo inferiore

Per esperimenti:

http://www.gametheory.net/Mike/applets/WinnerCurse/WinnerCurse.html

6.5 Collusioni

Ring

Alcuni acquirenti possono accordarsi per limitare le offerte; l'oggetto viene riassegnato tra i collusori che si dividono il guadagno

Sono possibili i sottoring

Più un'asta permette lo scambio di informazioni, più è possibile la collusione; quindi si ha il seguente ordine: asta inglese, asta Vickrey, asta in busta chiusa al primo prezzo e asta olandese

La collusione può avere luogo tra il venditore e alcuni acquirenti con lo scopo di far crescere il prezzo

Le aste in busta chiusa possono generare collusioni con il banditore

Nel 1999 la Germania bandì un'asta ascendente simultanea per dieci blocchi di frequenze, con il vincolo che ogni nuova offerta doveva incrementare il valore precedente di almeno il 10%

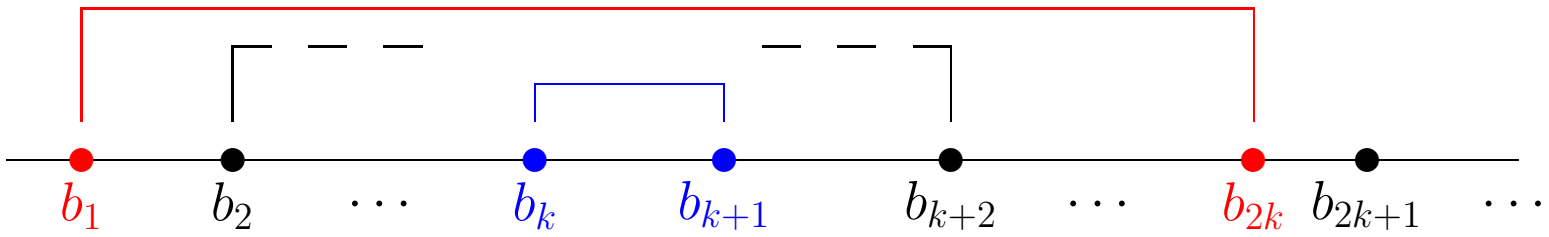
Mannesmann offrì 18.18 milioni di marchi per i blocchi da 1 a 5 e 20 milioni di marchi per i blocchi da 6 a 10

T-Mobil interpretò questo come "offri 20 milioni di marchi per i blocchi da 1 a 5 e lascia i blocchi da 6 a 10"

6.6 Aste multiple

Più beni identici, perfetti o almeno buoni sostituti, vengono assegnati al termine dell'asta
Se ogni acquirente può vincere al più un oggetto, solitamente si può fare una sola offerta
Se ogni acquirente può vincere più di un oggetto, gli offerenti fanno un'offerta per ciascun oggetto a cui sono interessati
I vincitori possono pagare lo stesso prezzo (*uniform pricing*) o prezzi differenti (*discriminatory pricing*)

Con il sistema *Vickrey pricing* è necessario che ogni acquirente faccia un'offerta per tutti gli oggetti (offerte decrescenti dipendono da valutazioni subadditive)
Il vincitore con l'offerta più bassa paga la prima offerta non vincente e così via con pagamenti decrescenti fino al vincitore con l'offerta più alta



Nel caso di beni complementari con valori superadditivi, il venditore può trarre vantaggio dal crescente interesse degli acquirenti per ottenere un bene complementare

Un caso particolare sono le *aste combinatorie* in cui sono venduti all'asta differenti oggetti
Gli acquirenti possono fare offerte sia per oggetti singoli che per gruppi di oggetti
Ci sono caratteristiche interessanti:

- $computazionali$
  assegnare gli oggetti massimizzando i profitti (problema NP-completo)
- $economiche$
  incentivare offerte veritiere (asta Vickrey)
- $altre$
  rappresentazioni efficienti e problemi di comunicazione

7 Giochi cooperativi

7.1 Introduzione

I giocatori possono associarsi per migliorare il proprio risultato
Per realizzare la cooperazione:

- deve essere possibile stipulare accordi (ad esempio non devono esserci regole antitrust o difficoltà di comunicazione)
- deve esserci la possibilità di far rispettare tali accordi, nel senso che deve esistere una autorità sufficientemente forte e accettata da tutti i componenti

Si distinguono due sottoclassi:

- Giochi cooperativi senza pagamenti laterali (NTU-Games)
  i giocatori ricevono un payoff assegnato
- Giochi cooperativi a pagamenti laterali (TU-Games)
  i giocatori di una coalizione possono ripartirsi in qualsiasi modo la vincita

I secondi costituiscono un caso particolare dei primi

In particolare per avere un gioco TU devono essere soddisfatte tre ipotesi:

- deve essere possibile trasferire l'utilità (da un punto di vista normativo)
- deve esistere un mezzo comune di scambio, ad esempio il denaro, con cui trasferire l'utilità (da un punto di vista materiale)
- le funzioni di utilità dei giocatori devono essere equivalenti

Esempio 7.1 (Coalizione semplice) *Sono dati tre giocatori I, II, III; se due di loro si accordano, formando una coalizione, il terzo giocatore da ad ognuno di essi una moneta, altrimenti nessuno riceve nulla. I payoff sono:*

$(1, 1, -2)$	*se I e II si coalizzano*
$(1, -2, 1)$	*se I e III si coalizzano*
$(-2, 1, 1)$	*se II e III si coalizzano*
$(0, 0, 0)$	*altrimenti*

Se i payoff relativi alla coalizione $\{II, III\}$ fossero $(-2.0, 1.1, 0.9)$ la posizione del giocatore II non si rafforza in quanto il giocatore III ha più interesse a coalizzarsi con I che con II; questa situazione non sussiste nel caso in cui sia possibile per II "trasferire" parte della propria vincita al giocatore III, ritornando alla situazione precedente ♢

7.1.1 Funzione caratteristica per un gioco TU

La funzione caratteristica può essere costruita a partire dal gioco a due persone tra S ed $N \setminus S$:

$$v'(S) = \max_{\sigma_S \in \Sigma_S} \min_{\sigma_{N\setminus S} \in \Sigma_{N\setminus S}} \left\{ \sum_{i \in S} u_i(\sigma_S, \sigma_{N\setminus S}) \right\} \quad \text{(von Neumann-Morgenstern)}$$

$$v''(S) = \min_{\sigma_{N\setminus S} \in \Sigma_{N\setminus S}} \max_{\sigma_S \in \Sigma_S} \left\{ \sum_{i \in S} u_i(\sigma_S, \sigma_{N\setminus S}) \right\}$$

I due risultati possono non coincidere ($v'' \geq v'$)

Il problema è assegnare correttamente il valore di $v(S)$

Esempio 7.2 (Costruzione della funzione caratteristica) *Si consideri il seguente gioco a tre giocatori:*

$3 = S$		
$1/2$	L	R
T	$1, 0, 4$	$1, 0, -2$
B	$1, 2, -3$	$0, -1, -5$

$3 = C$		
$1/2$	L	R
T	$1, -3, -3$	$2, 0, -4$
B	$0, 1, 4$	$0, -1, -2$

$3 = D$		
$1/2$	L	R
T	$1, 4, 3$	$2, -3, 4$
B	$2, 2, 3$	$0, 1, 5$

Volendo determinare il valore di v si può costruire il gioco tra $S = \{1, 2\}$ e $N \setminus S = \{3\}$:

S / $N \setminus S$	N_1	N_2	N_3
S_1	$1, 4$	$-2, -3$	$5, 3$
S_2	$1, -2$	$2, -4$	$-1, 4$
S_3	$3, -3$	$1, 4$	$4, 3$
S_4	$-1, -5$	$-1, -2$	$1, 5$

dove $S_1 = (T, L)$, $S_2 = (T, R)$, $S_3 = (B, L)$, $S_4 = (B, R)$ e $N_1 = S$, $N_2 = C$, $N_3 = D$

$$v'(S) = \max_{\sigma_S \in \Sigma_S} \min_{\sigma_{N\setminus S} \in \Sigma_{N\setminus S}} \left\{ \widehat{u}_i(\sigma_S, \sigma_{N\setminus S}) \right\} = \max\{-2, -1, 1, -1\} = 1$$

$$v''(S) = \min_{\sigma_{N\setminus S} \in \Sigma_{N\setminus S}} \max_{\sigma_S \in \Sigma_S} \left\{ \widehat{u}_i(\sigma_S, \sigma_{N\setminus S}) \right\} = \min\{3, 2, 5\} = 2$$

$v'(S)$ corrisponde alla strategia S_3 ed in effetti la coalizione S giocando $S_3 = (B, L)$ può garantirsi un payoff non inferiore a 1, mentre il valore $v''(S)$ corrisponde alla strategia S_2, ma la coalizione S giocando $S_2 = (T, R)$ non può garantirsi un payoff non inferiore a 2, anzi probabilmente il suo payoff risulterà inferiore

Entrambe le interpretazioni difettano di realismo poichè lo scopo della coalizione $N \setminus S$ è quello di massimizzare il proprio payoff e non di minimizzare il payoff di S

La validità delle formule precedenti è limitata dal fatto di non considerare le utilità di $N \setminus S$: in questo caso è facile osservare che $N \setminus S$ considera "rischiose" le strategie N_1 ed N_2, in corrispondenza delle quali si hanno i valori $v'(S)$ e $v''(S)$ ♢

Le funzioni di utilità sono solo rappresentazioni delle preferenze dei giocatori, pertanto la scelta delle strategie dei giocatori di S dovrebbe avvenire non sulle funzioni di utilità, ma sulle preferenze

Triplicando le utilità del giocatore 1 si ottiene:

$S \ / \ N \setminus S$	N_1	N_2	N_3
S_1	$3, 4$	$0, -3$	$7, 3$
S_2	$3, -2$	$6, -4$	$3, 4$
S_3	$5, -3$	$1, 4$	$8, 3$
S_4	$-1, -5$	$-1, -2$	$1, 5$

e quindi:

$$v'(S) = max\{0, 3, 1, -1\} = 3$$
$$v''(S) = min\{5, 6, 8\} = 5$$

I valori risultano differenti, ma soprattutto si ottengono in corrispondenza di differenti strategie per la coalizione S, in particolare $v'(S)$ si ottiene per S_2 e $v''(S)$ per S_3

Alle funzioni di utilità è stato dato un significato quantitativo che non necessariamente hanno

Le funzioni di utilità non sono necessariamente additive, quindi non si può definire l'utilità della coalizione come la somma delle utilità

La funzione caratteristica assegna ad ogni coalizione l'utilità che i giocatori possono ottenere "indipendentemente" dagli altri, non "qualunque sia la strategia" degli altri giocatori oppure "escludendo" gli altri giocatori

Si può utilizzare il significato di "senza la collaborazione" degli altri giocatori

7.2 Giochi cooperativi senza pagamenti laterali

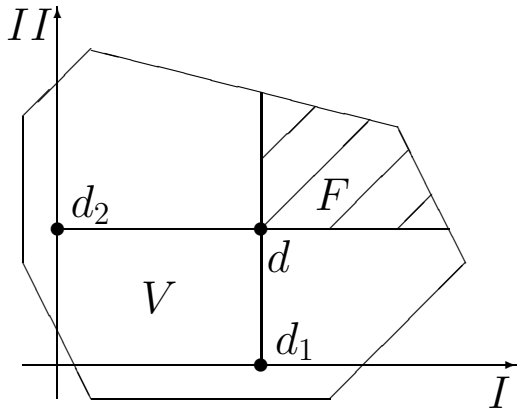
Introdotti da Aumann e Peleg (1960); ogni giocatore utilizza le proprie strategie in accordo con gli altri giocatori con cui ha formato una coalizione, ma consegue una sua propria vincita indipendentemente dagli altri

Definizione 7.1 *Un gioco NTU è una coppia* $G = (N, V)$ *dove* N *è l'insieme dei giocatori e* V *è la funzione che ad ogni coalizione* $S \subset N$ *associa l'insieme dei payoff ammissibili per i giocatori di* S*, tale che:*

- $V(S) \subset \mathbb{R}^S$
- $V(S)$ *è chiuso e non vuoto*
- $V(S) = V(S) - \mathbb{R}^S_{\geq}$ (comprehensiveness)

7.3 Problema di contrattazione a due giocatori senza pagamenti laterali

E' una applicazione dei giochi cooperativi senza pagamenti laterali (Nash, 1950)
I giocatori possono accordarsi per una strategia correlata e possono giocare qualunque elemento dello spazio delle strategie $X \times Y$
Sotto opportune ipotesi di compattezza dell'insieme delle strategie possibili (ad esempio un simplesso) e di comportamento delle funzioni di utilità (ad esempio lineari), l'immagine nello spazio delle utilità $I \times II$ è un insieme V convesso e chiuso



Al giocatore i si assegna un valore di riferimento d_i, ad esempio la soluzione non cooperativa di maxmin, quella di Nash o altro, e si definisce il punto $d = (d_1, d_2)$ (*disagreement point*); si considera il sottoinsieme $F = V \cap \{(x_1, x_2) | x_1 \geq d_1, x_2 \geq d_2\}$ chiuso, convesso, limitato e non vuoto (*feasibility set*)

Definizione 7.2 *Un problema di contrattazione a due giocatori è rappresentato dalla coppia* (F, d) *con* $F \subset \mathbb{R}^2$ *e* $d = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2$

E' interessante il caso di giocatori antagonisti (frontiera di Pareto = giocatori efficientisti)

Gioco NTU :

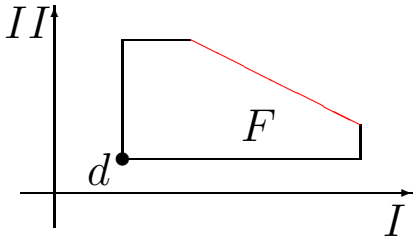
- $V(1) = \{x_1 \in \mathbb{R} | x_1 \leq d_1\}$
- $V(2) = \{x_2 \in \mathbb{R} | x_2 \leq d_2\}$
- $V(1,2) = F - \mathbb{R}^2_{\geq}$

7.3.1 Soluzione assiomatica di Nash (1950)

Una soluzione $\Phi(F,d)$ di un problema di contrattazione (F,d) è una funzione $\Phi : C \to \mathbb{R}^2$, con C insieme dei problemi di contrattazione, tale che $\Phi(F,d) \in F$ e che soddisfa i seguenti requisiti detti *assiomi di Nash*:

1. Efficienza stretta

$$x \in F, x \geq \Phi(F,d) \Rightarrow x = \Phi(F,d)$$



2. Razionalità individuale

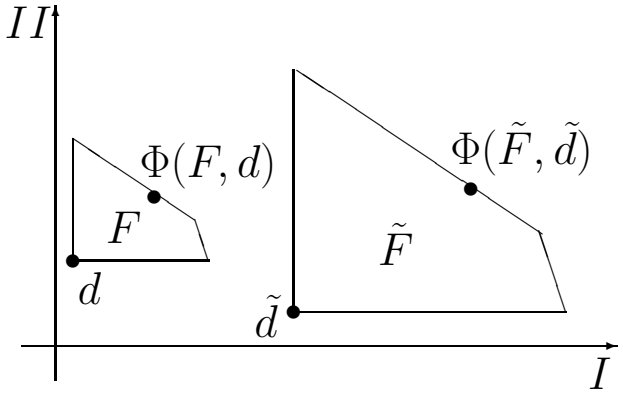
$$\Phi(F,d) \geq d$$

con la relazione d'ordine di $\mathbb{R}^2$

3. Scale covariance

$\forall\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_>, \forall\ \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ siano $\tilde{F} = \{(\lambda_1 x_1 + \mu_1, \lambda_2 x_2 + \mu_2) \mid (x_1, x_2) \in F\}$ e $\tilde{d} = (\lambda_1 d_1 + \mu_1, \lambda_2 d_2 + \mu_2)$ allora:

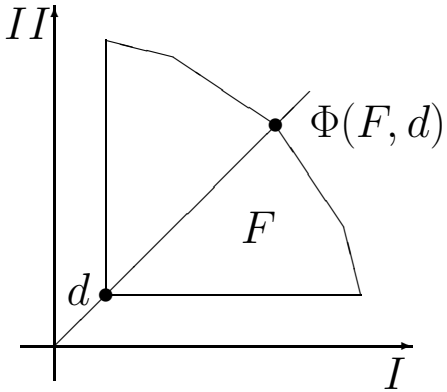
$$\Phi(\tilde{F}, \tilde{d}) = (\lambda_1 \Phi_1(F, d) + \mu_1, \lambda_2 \Phi_2(F, d) + \mu_2)$$



4. Simmetria

Se $(a, b) \in F \iff (b, a) \in F$ e $d_1 = d_2$ allora:

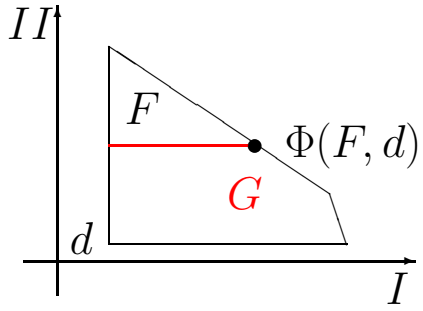
$$\Phi_1(F, d) = \Phi_2(F, d)$$



5. Indipendenza dalle alternative irrilevanti

Assioma controverso

$$d, \Phi(F,d) \in G \subset F \Rightarrow \Phi(G,d) = \Phi(F,d)$$



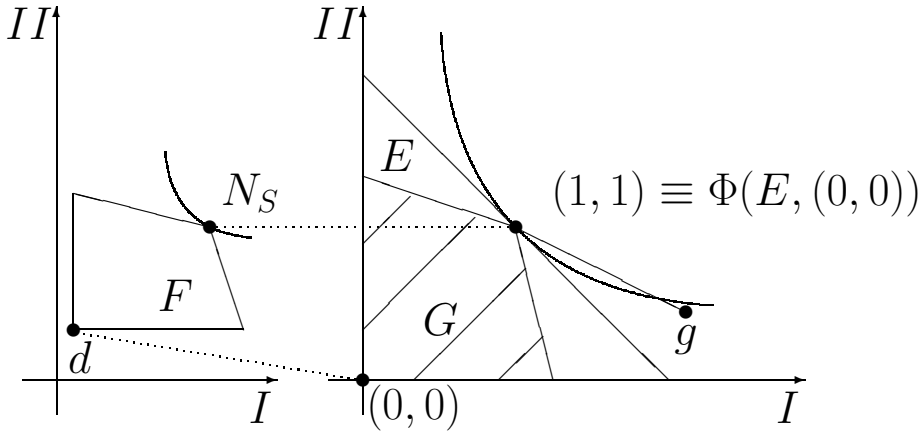
Teorema 7.1 *Esiste un'unica funzione* $\Phi : C \to \mathbb{R}^2$ *che soddisfa gli assiomi di Nash:*

$$\Phi(F, d) = argmax\ \{(x_1 - d_1)(x_2 - d_2) | x \in F\} = N_S$$

Dimostrazione

Si cerca una funzione opportuna a partire dalle conoscenze su F. Dato (F, d), se F ha almeno un punto interno esiste un solo punto (x_1, x_2) di F per cui $(x_1 - d_1)(x_2 - d_2)$ è massimo
Per l'assioma 3 è possibile definire una trasformazione di F in G tale che:

$$\begin{aligned} d &\to (0,0) \qquad (*) \\ (x_1, x_2) &\to (1,1) \qquad (*) \end{aligned}$$

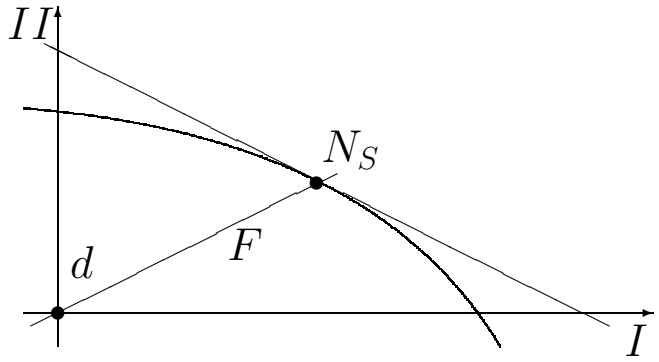


Considerando il triangolo simmetrico E, $(E, (0, 0))$ ha soluzione (1, 1) (assioma 4) e quindi, essendo $G \subset E$, la soluzione del problema $(G, (0, 0))$ è (1,1) (assioma 5). Per verificare $G \subset E$ si consideri per assurdo un punto $g \in G$, $g \notin E$. Per la convessità di G il segmento $[(1, 1), g] \subset G$ e contiene punti in cui il prodotto di Nash è migliore che in (1, 1) ♣

- Se F non ha punti interni il payoff di almeno un giocatore potrebbe essere costante su F e il prodotto di Nash potrebbe essere identicamente nullo
- La soluzione di Nash può essere caratterizzata dalla seguente proprietà:

$$F \subseteq H = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid h(x) \leq h(N_S) \right\}$$

dove $h(x_1, x_2) = x_1(N_{S2} - d_2) + x_2(N_{S1} - d_1)$
Esiste una retta passante per N_S che forma con l'asse delle ascisse un angolo opposto a quello formato dalla retta passante per d e per N_S tale che F è tutto contenuto nel semipiano contenente d



- Nella trattazione precedente sono state fatte alcune ipotesi non necessariamente verificate:

  1. non è detto che il punto d influenzi nel modo esposto la soluzione
  2. i decisori possono non uniformarsi al modello di von Neumann - Morgenstern

  Dati due problemi identici si può pervenire a risultati diversi (un decisore potrebbe essere più rigido in un caso che nell'altro)

Il problema di contrattazione è alla base di numerosi concetti di soluzione tra i quali l'insieme di contrattazione (Bargaining set) di Aumann e Maschler (1964), il Kernel introdotto da Davis e Maschler (1965) e il nucleolo dovuto a Schmeidler (1969)

7.3.2 Altre soluzioni

L'assioma 5 è stato oggetto di revisione da parte di Kalai-Smorodinsky (1975):

5'. Monotonia individuale

Sia $d \in G \subset F$

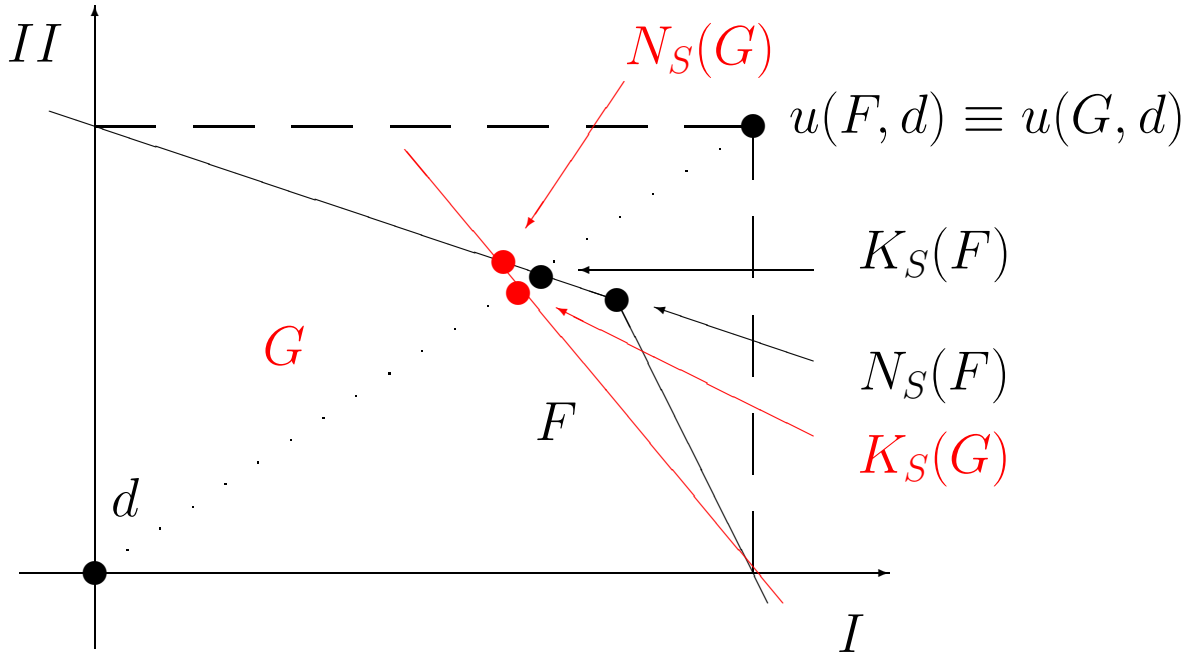
Se $u_1(G,d) = u_1(F,d)$ allora $\Phi_2(G,d) \leq \Phi_2(F,d)$ e se $u_2(G,d) = u_2(F,d)$ allora $\Phi_1(G,d) \leq \Phi_1(F,d)$, dove $u(F,d)$ è il punto *utopia* del problema (F,d), cioè $u_i(F,d) = max\ \{x_i \mid x \in F\}, i = 1,2$

Kalai e Smorodinsky hanno proposto la seguente soluzione:

$$K_S = argmax\ \left\{ x \in F \,\middle|\, \frac{x_1 - d_1}{u_1(F,d) - d_1} = \frac{x_2 - d_2}{u_2(F,d) - d_2} \right\}$$

L'assioma 5' è violato dalla soluzione di Nash

Esempio 7.3 (Soluzioni di Nash e di Kalai-Smorodinsky) *Si consideri la seguente situazione:*



Passando da F *a* G*, il punto utopia è invariato ma* $N_{S2}(G) > N_{S2}(F)$*, mentre* $K_{S2}(G) < K_{S2}(F)$ ♢

Data l'importanza del problema di contrattazione sono state proposte altre soluzioni, tra cui:

Soluzione Egualitaria - Kalai (1977)

$E_S = argmax\ \{|x-d|,\ x \in F|\ x_1 - d_1 = x_2 - d_2\}$

Monotonia stretta

Siano (F,d) e (G,d) due problemi di contrattazione, con $d \in G \subseteq F$ allora $\Phi(G,d) \leq \Phi(F,d)$

Teorema 7.2 *La soluzione egualitaria è l'unica funzione $\Phi : C \to \mathbb{R}^2$ che soddisfa gli assiomi di efficienza stretta, simmetria e monotonia stretta*

Altre soluzioni sono:

Soluzione λ-Egualitaria

$E_S^\lambda = argmax\ \{|x-d|,\ x \in F|\ \lambda_1(x_1 - d_1) = \lambda_2(x_2 - d_2),\ \lambda_1, \lambda_2 > 0\}$

Soluzione delle Aree uguali

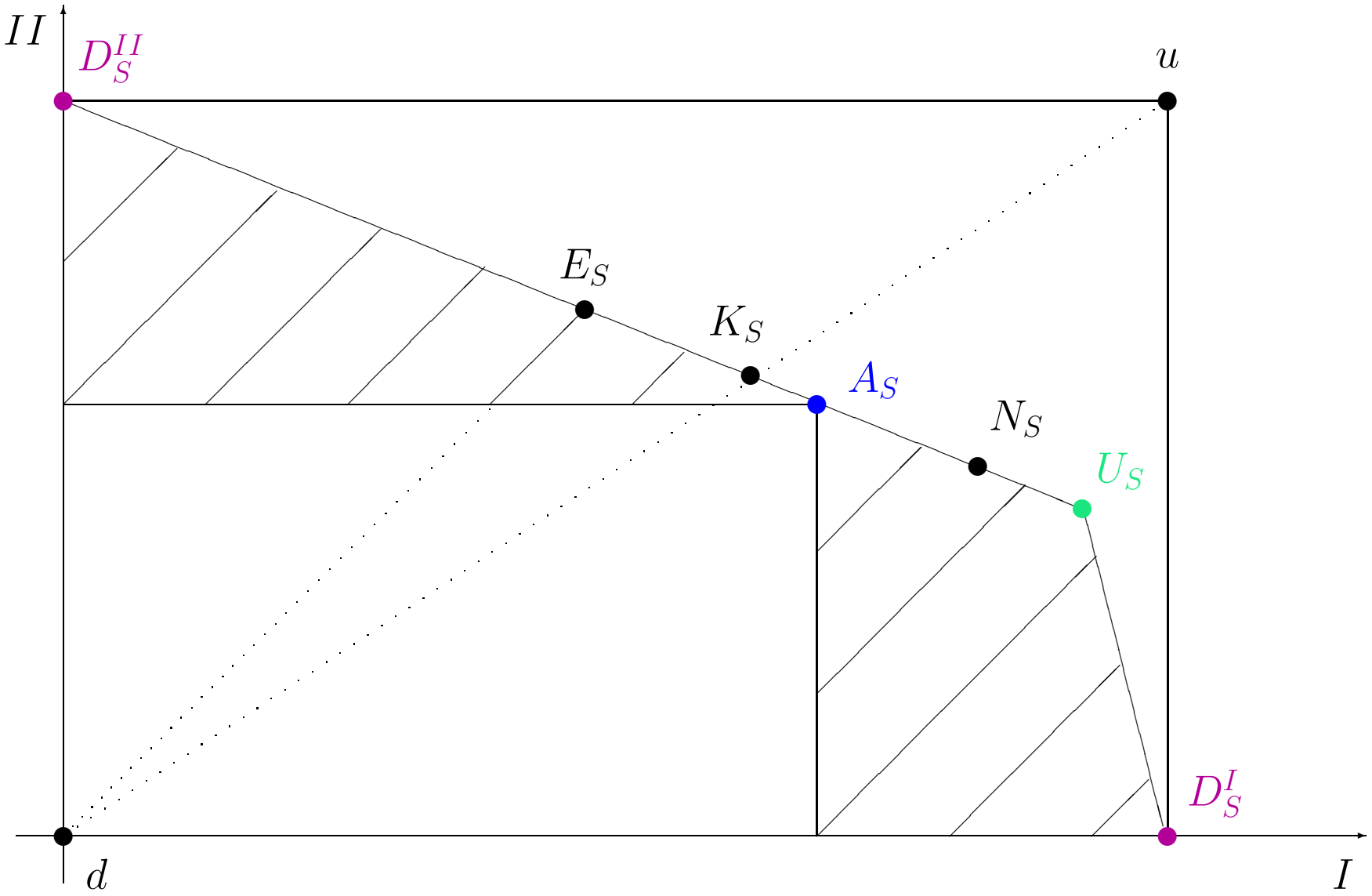
A_S s.t. $\mathcal{A}\left(\left\{d + \mathbb{R}^2_{\geq}\right\} \cap \{x \in F \mid x_1 \geq (A_S)_1\}\right) = \mathcal{A}\left(\left\{d + \mathbb{R}^2_{\geq}\right\} \cap \{x \in F \mid x_2 \geq (A_S)_2\}\right)$

Soluzione Dittatoriale

$D_S^i = argmax\ \{x_i | x \in F, x_j = d_j, j \neq i\}$

Soluzione Utilitaria

$U_S = argmax\ \{x_1 + x_2 | x \in F\}$


II
D_S^{II}
u
E_S
K_S
A_S
N_S
U_S
D_S^I
d
I

7.4 Giochi cooperativi a pagamenti laterali

In questi giochi introdotti da Von Neumann e Morgenstern (1944) i giocatori possono stipulare accordi vincolanti e possono ripartirsi la vincita con un accordo al di fuori delle regole del gioco, la cui validità può estendersi anche oltre la fine del gioco

Come trasferire la vincita se i giocatori hanno differenti funzioni di utilità?

Definizione 7.3 *Un gioco TU è una coppia* $G = (N, v)$ *dove* N *è l'insieme dei giocatori e* v *è la funzione caratteristica, con* $v(\emptyset) = 0$

Se $v(S) \leq 0, \forall S \subseteq N$ si ha un *gioco di costi* o cost game (N, c) in cui si pone $c = -v$

Esempio 7.4 (Gioco dei guanti) *Due insiemi di giocatori, L ed R, possiedono dei guanti; i giocatori di L possiedono solo guanti sinistri mentre i giocatori di R possiedono solo guanti destri. Il valore di una coalizione è dato dal numero di paia di guanti che riescono a formare. In generale ogni giocatore possiede un solo guanto. Se i giocatori di L sono 1 e 2 e i giocatori di R sono 3 e 4 si ha:*

$$
\begin{aligned}
& N = \{1, 2, 3, 4\} \\
& v(i) = 0 \qquad\qquad \forall\, i \in N \\
& v(12) = v(34) = 0 \\
& v(S) = 1 \qquad\qquad se\ |S| = 2\ e\ S \neq \{12\}, S \neq \{34\}\ oppure\ se\ |S| = 3 \\
& v(N) = 2
\end{aligned}
$$

$\diamondsuit$

Definizione 7.4

- *Un gioco* $G = (N, v)$ *si dice monotono se* $v(S) \leq v(T),\ \forall\ S \subseteq T$. *Anche per un cost game si ha* $c(S) \leq c(T),\ \forall\ S \subseteq T$
- *Un gioco* $G = (N, v)$ *si dice superadditivo se* $v(S)+v(T) \leq v(S \cup T),\ \forall\ S, T \subseteq N, S \cap T = \emptyset$*; si dice subadditivo se* $v(S) + v(T) \geq v(S \cup T),\ \forall\ S, T \subseteq N, S \cap T = \emptyset$*; si dice additivo se* $v(S) + v(T) = v(S \cup T),\ \forall\ S, T \subseteq N, S \cap T = \emptyset$
- *Un gioco* $G = (N, v)$ *si dice convesso se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:*
  - $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T),\ \forall\ S, T \subseteq N$
  - $v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T),\ \forall\ S \subset T \subseteq N \setminus \{i\},\ \forall\ i \in N$
- *Un gioco* $G = (N, v)$ *si dice coesivo se per ogni partizione di* N $\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ *si ha:*

$$\sum_{i=1,\ldots,k} v(S_i) \leq v(N)$$

Per un cost game deve valere $\sum_{i=1,\ldots,k} c(S_i) \geq c(N)$

Definizione 7.5 *Un gioco $G = (N, v)$ si dice semplice 0-1 o semplice se le coalizioni possono assumere solo i valori 0 e 1*

Se una coalizione ha valore 1 è detta vincente, se ha valore 0 è detta perdente

Solitamente la grande coalizione è vincente

Spesso si chiede che il gioco sia monotono

- Nella definizione di monotonia non si tiene conto della cardinalità delle coalizioni
- L'equivalenza delle definizioni di convessità è oggetto di un teorema.
- I giochi semplici trovano applicazione nelle situazioni in cui una coalizione è caratterizzata dal riuscire a conseguire o meno un determinato risultato, come nei giochi di maggioranza, utilizzati in politica
- La coesività è più debole della superadditività ed esprime la "convenienza" dei giocatori a formare la grande coalizione, piuttosto che riunirsi in sottocoalizioni. L'importanza deriva dal fatto che in generale i concetti di soluzione più comuni costituiscono una ripartizione del valore della grande coalizione

Le soluzioni di un gioco TU possono essere raggruppate in due famiglie:

- *soluzioni insiemistiche* che individuano un insieme di vettori payoff che ripartiscono il valore del gioco tra tutti i giocatori
- *soluzioni puntuali* che individuano una sola ripartizione e che costituiscono l'attuale tendenza in quanto più simili all'idea classica di soluzione di un problema

8 Soluzioni insiemistiche di un gioco TU

8.1 Imputazioni

Per determinare le singole vincite si potrebbe risolvere un sottogioco ristretto ai giocatori di ciascuna coalizione, oppure suddividere in parti uguali la vincita, trascurando il contributo dei singoli giocatori
Altri metodi più complessi tengono conto del ruolo svolto da ciascun giocatore

Definizione 8.1 *Dato un gioco* $G = (N, v)$ *si dice imputazione o ripartizione del valore del gioco o soluzione del gioco un vettore* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *tale che:*

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N) \qquad ipotesi\ di\ efficienza$$

$$x_i \geq v(i); i = 1, \ldots, n \qquad ipotesi\ di\ forza\ dei\ giocatori\ o\ razionalità\ individuale$$

Nel caso di un cost game la razionalità individuale richiede $x_i \leq c(i)$

L'insieme di tutte le imputazioni si indica con $E(v)$

Definizione 8.2 *Se per un gioco $G = (N, v)$ si ha:*

$$\sum_{i \in N} v(i) = v(N)$$

allora $E(v)$ ha come unico elemento $x = (v(1), v(2), \ldots, v(n))$; in questo caso il gioco è detto inessenziale; se $\sum_{i \in N} v(i) < v(N)$ il gioco è detto essenziale

La razionalità individuale costituisce una condizione per ogni concetto di soluzione
Se il gioco è essenziale esistono più imputazioni possibili e si ripropone il problema di scegliere la "soluzione": se due imputazioni x e y sono distinte esiste almeno un giocatore $k \in N$ per cui $x_k > y_k$ e almeno un giocatore $h \in N$ per cui $x_h < y_h$

Definizione 8.3

- *Date $x, y \in E(v)$ e una coalizione S si dice che x domina y mediante $S, x \succ_S y$, se:*

  1. $x_i > y_i \qquad \forall i \in S$

  2. $x(S) \leq v(S)$

  dove $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$.

- *Date $x, y \in E(v)$ si dice che x domina y, $x \succ y$, se esiste S tale che $x \succ_S y$*

La dominanza non è riflessiva, nè antisimmetrica, nè transitiva

Esempio 8.1 (Non antisimmetria) *Sia dato il seguente gioco:*

$$N = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$v(i) = 0$$
$$v(i, j) = v(i, j, k) = v(N) = 1 \quad \forall i, j, k$$

Date le seguenti imputazioni $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right)$ *e* $y = \left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *si ha:*

$$x \succ_{\{1,2\}} y \text{ e } y \succ_{\{3,4\}} x$$

8.2 Insiemi stabili

E' stato proposto da Von Neumann - Morgenstern (1944) come la "soluzione" dei giochi TU

Definizione 8.4 *Un insieme $V \subset E(v)$ si dice stabile se:*

1. *dati $x, y \in V$ si ha $x \not\succ y$ e viceversa* *stabilità interna*
2. *dato $x \notin V$, $\exists y \in V$ per il quale si ha $y \succ x$* *stabilità esterna*

Un insieme stabile contiene la soluzione ma la decisione dipende da altre informazioni non espresse dalla forma caratteristica

Un gioco può avere più insiemi stabili

Esempio 8.2 (Maggioranza semplice)

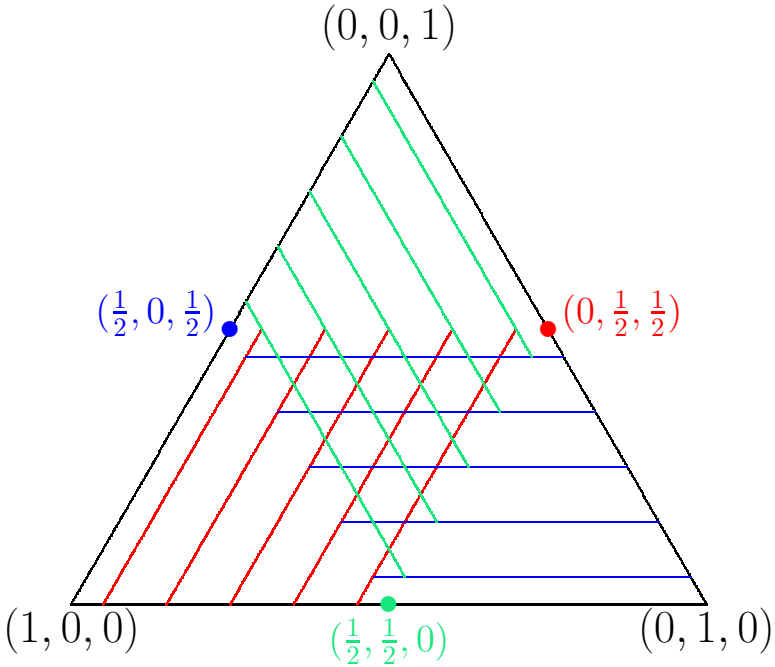
L'insieme stabile più comune è:

$$\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right),\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right),\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$ *domina mediante* $\{1,2\}$

$(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$ *domina mediante* $\{1,3\}$

$(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ *domina mediante* $\{2,3\}$

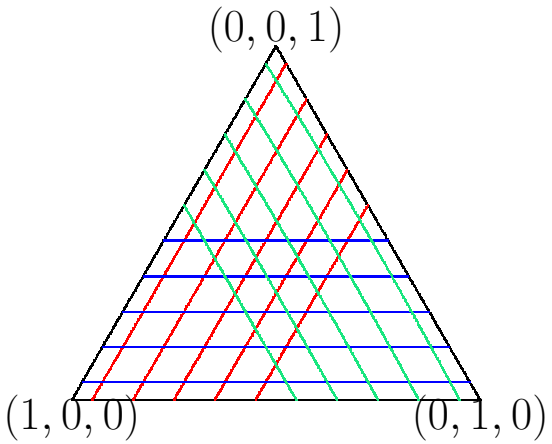


Altri insiemi stabili sono:

- $V_{1,c} = \{c, t, 1-c-t\}$
- $V_{2,c} = \{1-c-t, c, t\}$
- $V_{3,c} = \{t, 1-c-t, c\}$

$con \;\; c \in [0, \frac{1}{2}[\qquad funzione \; delle \; tradizioni$

$\qquad t \in [0, 1-c] \;\; funzione \; della \; forza$



♢

Nel 1968 Lucas ha dato un esempio di gioco senza insiemi stabili, indebolendo ulteriormente questo concetto di soluzione

8.3 Nucleo

E' probabilmente il concetto di soluzione insiemistico più interessante per numerose classi di giochi; è stato introdotto da Gillies (1953 e 1959)

$$x(S) \geq v(S) \;\; S \subset N \qquad \textit{ipotesi di razionalità della coalizione}$$

Definizione 8.5 *Si dice nucleo di un gioco, o core, l'insieme:*

$$C(v) = \{x \in E(v) | x(S) \geq v(S), \forall \; S \subset N\}$$

Nel caso di un cost game c la razionalità della coalizione richiede $x(S) \leq c(S), \forall \; S \subset N$

- Le imputazioni non dominate costituiscono il nucleo del gioco
- Il nucleo può essere vuoto come nel gioco di maggioranza semplice e in generale nei giochi essenziali a somma costante
- Il nucleo ha un aspetto normativo (quali soluzioni non bisogna scegliere). Se il nucleo è vuoto non si può concludere che la grande coalizione non si forma, ma solo che è instabile

Esempio 8.3 (Nucleo del gioco dei guanti) *Riferendosi all'Esempio 7.4, il nucleo è:*

$$C(v) = \{(\alpha, \alpha, 1-\alpha, 1-\alpha) s.t. 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

In generale se $L = \{1, ..., n_l\}$ *e* $R = \{1, ..., n_r\}$ *si ha:*

se $n_l = n_r$*:*

$$C(v) = \{(\alpha, ..., \alpha, 1-\alpha, ..., 1-\alpha) s.t. 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

se $n_l < n_r$*:*

$$C(v) = \{(\underbrace{1, ..., 1}_{1,...,n_l}, \underbrace{0, ..., 0}_{1,...,n_r})\}$$

se $n_l > n_r$*:*

$$C(v) = \{(\underbrace{0, ..., 0}_{1,...,n_l}, \underbrace{1, ..., 1}_{1,...,n_r})\}$$

Il nucleo evidenzia il comportamento del mercato quando uno tra due beni complementari è carente ♢

8.3.1 Bilanciamento

Per stabilire se un gioco ha nucleo vuoto o meno, la coesività o la superadditività non danno informazioni precise; ad esempio il gioco di maggioranza semplice ha nucleo vuoto ma è superadditivo e quindi anche coesivo
Un gioco può non essere superadditivo, ma avere nucleo non vuoto

Esempio 8.4 (Gioco non superadditivo a nucleo non vuoto) *Si consideri il gioco TU:*

$$N = \{1, 2, 3\}$$
$$v(S) = 1 \qquad se\ S \neq N$$
$$v(N) = 3$$

Il gioco non è superadditivo poichè $v(1) + v(2) = 2$ *e* $v(12) = 1$ *ma ha nucleo non vuoto in quanto* $x = (1, 1, 1) \in C(v)$ ♢

Se un gioco non è coesivo ha nucleo vuoto, in quanto per ogni allocazione x esisterebbe una partizione $\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ tale che:

$$x(N) = v(N) < \sum_{i=1,\ldots,k} v(S_i) \leq \sum_{i=1,\ldots,k} x(S_i) = x(N)$$

Definizione 8.6

- *Una collezione* $\mathcal{B} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ *di sottoinsiemi di* N *è detta bilanciata se esistono* m *numeri non negativi* $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *detti coefficienti di bilanciamento, tali che:*

$$\sum_{S_j \ni i} y_j = 1 \qquad \forall i \in N$$

- *Una collezione bilanciata è detta minimale se nessuna sottocollezione è bilanciata*
- *Un gioco è detto bilanciato se per ogni collezione bilanciata minimale* $\mathcal{B} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ *con coefficienti di bilanciamento* $y_1, y_2, \ldots, y_m$*, si ha:*

$$\sum_{j=1,\ldots,m} y_j v(S_j) \leq v(N)$$

Le collezioni bilanciate non dipendono dalla funzione caratteristica, ma solo da N

Teorema 8.1 (Bondareva, 1963 - Shapley, 1967) *Un gioco $G = (N, v)$ ha nucleo non vuoto se e solo se è bilanciato*

Il teorema è particolarmente utile per dimostrare che un gioco ha nucleo vuoto in quanto è sufficiente trovare una collezione bilanciata che non verifica la condizione

Un gioco a nucleo non vuoto viene anche detto bilanciato

Esempio 8.5 (Collezioni bilanciate)

1. *Un gioco a tre giocatori superadditivo è bilanciato se e solo se* $v(12) + v(13) + v(23) \leq 2\ v(123)$ *poichè* $\mathcal{B} = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$ *è l'unica collezione bilanciata minimale con coefficienti* $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.
2. *Sia dato il gioco:*

$$N = \{1,2,3,4\}$$
$$v(1) = v(2) = v(3) = v(4) = v(14) = v(24) = 0; v(23) = v(34) = 2$$
$$v(12) = v(13) = v(123) = 3; v(124) = 4; v(134) = v(234) = 5; v(N) = 6$$

Il gioco non è bilanciato in quanto $\mathcal{B} = \{\{1,2\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}$ *è una collezione bilanciata con coefficienti* $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ *per la quale si ha:*

$$\frac{1}{2}\ v(12) + \frac{1}{2}\ v(134) + \frac{1}{2}\ v(234) = \frac{13}{2} > 6 = v(N)$$

♢

8.4 Assignment game

Problema di assegnazione

$$\mathcal{A} = (N^v, N^c, A, B)$$

dove
- $N^v = \{1, ..., n^v\}$ insieme dei venditori
- $N^c = \{1, ..., n^c\}$ insieme dei compratori
- A vettore; $a_j =$ valutazione che $j \in N^v$ da al proprio oggetto
- B matrice; $b_{ij} =$ valutazione che $i \in N^c$ da all'oggetto di $j \in N^v$

- Gli oggetti non hanno un prezzo di mercato
- Ciascun venditore possiede un solo oggetto
- Ciascun compratore può acquistare un solo oggetto

E' possibile associare al problema il gioco TU semplice (N, v) con:

$$N = N^v \cup N^c$$

e v è definita nel modo seguente:

- Se $i^* \in N^c$ e $j^* \in N^v$:

$$v(i^*j^*) = c_{i^*j^*} = \begin{cases} b_{i^*j^*} - a_{j^*} & \text{se } b_{i^*j^*} - a_{j^*} \geq 0 \\ 0 & \text{se } b_{i^*j^*} - a_{j^*} < 0 \end{cases}$$

- Se S contiene più compratori che venditori, detto $i(j) \in S \cap N^c$ il compratore dell'oggetto offerto da $j \in S \cap N^v$:

$$v(S) = max \sum_{j \in S \cap N^v} c_{i(j),j}$$

- Se S contiene più venditori che compratori, detto $j(i) \in S \cap N^v$ il venditore dell'oggetto acquistato da $i \in S \cap N^c$:

$$v(S) = max \sum_{i \in S \cap N^c} c_{i,j(i)}$$

I valori c_{ij} definiscono il problema di assegnazione:

$$\begin{aligned} max \;\; & z = \sum_{i \in N^c, j \in N^v} c_{ij} x_{ij} \\ s.t. \quad & \sum_{i \in N^c} x_{ij} \leq 1 && \forall\, j \in N^v \\ & \sum_{j \in N^v} x_{ij} \leq 1 && \forall\, i \in N^c \\ & x_{ij} \in \{0,1\} && \forall\, i \in N^c, j \in N^v \end{aligned}$$

dove $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ e } j \text{ si accordano} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Per il teorema di Owen (1975) il nucleo contiene le imputazioni ottenute da una soluzione ottimale del duale:

$$\begin{aligned} min \;\; & w = \sum_{j \in N^v} y_j^v + \sum_{i \in N^c} y_i^c \\ s.t. \quad & y_j^v + y_i^c \geq c_{ij} && \forall\, j \in N^v, \forall\, i \in N^c \end{aligned}$$

- Le soluzioni ottimali duali devono avere le componenti non negative per la razionalità individuale

Esempio 8.6 (Gioco di assegnazione) *Ci sono tre giocatori,* 1 *(venditore,* $a_1 = 10$*),* 2 *e* 3 *(compratori,* $b_{21} = 12, b_{31} = 15$*)*

$$v(1) = v(2) = v(3) = v(23) = 0; v(12) = 2; v(13) = v(N) = 5$$

$$core(v) = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_1 = \alpha, x_2 = 0, x_3 = 5 - \alpha, 2 \leq \alpha \leq 5\}$$

L'oggetto non viene venduto a 2 *e il payoff di* 1 *e* 3 *dipende da come si accordano, ma l'utilità di* 1 *è almeno 2 unità. In altre parole il prezzo di vendita è almeno 12 (*1 *può accordarsi con* 2*), ma non più di 15 (*3 *si ritira)*

Se $\bar{b}_{21} = 15$ *allora* $core(v) = \{(5, 0, 0)\}$ *cioè il prezzo di vendita è 15 (legge della domanda e dell'offerta)* ♢

- Considerazioni economiche

  1. La legge dell'equilibrio tra domanda e offerta dice che il prezzo deve far sì che la domanda sia uguale all'offerta, per cui se il prezzo dell'oggetto fosse inferiore a 12 vi sarebbero due acquirenti mentre se il prezzo fosse superiore a 15 non vi sarebbero acquirenti
  2. Le leggi economiche non escludono, come il nucleo, un'utilità positiva per il giocatore 2; infatti il giocatore 1 potrebbe offrire al giocatore 2 parte della sua utilità in cambio di un'offerta maggiore per far sì che il prezzo pagato dal giocatore 3 sia più alto oppure il giocatore 3 potrebbe offrire al giocatore 2 parte della sua utilità in cambio del suo ritiro per far sì che il prezzo pagato al giocatore 1 sia più basso

9 Soluzioni puntuali di un gioco TU

Prendono frequentemente il nome di *indici di potere* o *valori* perchè permettono di identificare il "potere" di ciascun giocatore all'interno del gioco
Il termine "indice di potere" si usa per i giochi semplici, mentre per un gioco qualsiasi si preferisce il termine "valore"

9.1 Valore di Shapley (1953)

Si basa sul *contributo marginale* di ogni giocatore

Definizione 9.1 *Si chiama valore di Shapley il vettore $\phi(v)$ la cui componente ϕ_i è il contributo marginale medio del giocatore i rispetto alle possibili permutazioni dei giocatori, cioè:*

$$\phi_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi} [v(P(\pi, i) \cup \{i\}) - v(P(\pi, i))]$$

dove $n = |N|$, Π è l'insieme delle permutazioni di N e $P(\pi, i)$ è l'insieme dei giocatori che precedono i nella permutazione π

Il valore di Shapley per un gioco cooperativo esiste ed è unico

Se il gioco è superadditivo (subadditivo per un cost game) il valore di Shapley è un'imputazione:

$$\sum_{i \in N} \phi_i(v) = v(N)$$
$$\phi_i(v) \geq v(i) \qquad \forall i \in N$$

ma non è necessariamente un elemento del nucleo

Se il gioco è convesso (concavo per un cost game) il valore di Shapley è un elemento del nucleo

Esempio 9.1 (Gioco di assegnazione) *Riferendosi all'Esempio 8.6, dove* $v(1) = v(2) = v(3) = v(23) = 0; v(12) = 2; v(13) = v(123) = 5$ *il valore di Shapley è dato da:*

	Contributi marginali		
Permutazioni	*Giocatore* 1	*Giocatore* 2	*Giocatore* 3
1 2 3	$v(1) - v(\emptyset) = 0$	$v(12) - v(1) = 2$	$v(123) - v(12) = 3$
1 3 2	$v(1) - v(\emptyset) = 0$	$v(123) - v(13) = 0$	$v(13) - v(1) = 5$
2 1 3	$v(12) - v(2) = 2$	$v(2) - v(\emptyset) = 0$	$v(123) - v(12) = 3$
2 3 1	$v(123) - v(23) = 5$	$v(2) - v(\emptyset) = 0$	$v(23) - v(2) = 0$
3 1 2	$v(13) - v(3) = 5$	$v(123) - v(13) = 0$	$v(3) - v(\emptyset) = 0$
3 2 1	$v(123) - v(23) = 5$	$v(23) - v(3) = 0$	$v(3) - v(\emptyset) = 0$
ϕ_i	$\frac{17}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{11}{6}$

Il valore di Shapley riflette il valore economico del giocatore 2 ♢

9.1.1 Assiomi di Shapley

Sia data una regola ψ che ad un gioco $G(N, v)$ associa un vettore di $\mathbb{R}^N$

1. Simmetria
   Se due giocatori i, j sono simmetrici, cioè $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}), \forall\ S \subseteq N \setminus \{i, j\}$, allora $\psi_i(v) = \psi_j(v)$
2. Dummy player
   Sia i un giocatore fittizio, cioè $v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(i)\ \forall\ S \subseteq N \setminus \{i\}$, allora $\psi_i(v) = v(i)$
3. Additività o indipendenza (assioma controverso)
   Dati due giochi u e v, sia $(u+v)$ il gioco somma definito da $(u+v)(S) = u(S)+v(S),\ \forall\, S \subseteq N$ allora $\psi_i(u + v) = \psi_i(u) + \psi_i(v), \forall\ i \in N$

ϕ è l'unico vettore efficiente che soddisfa i precedenti assiomi

- L'assioma di simmetria può essere sostituito dall'assioma di *anonimato*:
  Dato un gioco v e una permutazione dei giocatori π sia u il gioco definito da $u(\pi(S)) = v(S)\ \forall\ S \subseteq N$ allora $\psi_{\pi(i)}(u) = \psi_i(v)$
- L'assioma di dummy player può essere sostituito dall'assioma di *null player*:
  Sia i un giocatore nullo, cioè $v(S \cup \{i\}) = v(S),\ \forall\ S \subseteq N \setminus \{i\}$, allora $\psi_i(v) = 0$

9.1.2 Calcolo del valore di Shapley

Il valore di Shapley risulta molto complesso da calcolare

Definizione

E' necessario determinare i contributi marginali dei giocatori nelle $n!$ possibili coalizioni ordinate
Con 10 giocatori, per ogni giocatore ci sono $10! = 3.628.800$ permutazioni

Semplificazione

Considerare le possibili $2^n - 1$ coalizioni non vuote e per ciascuna considerare ogni giocatore come l'ultimo arrivato e quindi "pesare" il suo contributo marginale con le permutazioni degli altri giocatori della coalizione e dei giocatori non facenti parte della coalizione:

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N, i \in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}[v(S) - v(S \setminus \{i\})]$$

Con 10 giocatori ci sono $2^{10} - 1 = 1.023$ coalizioni

Formule "ad hoc"

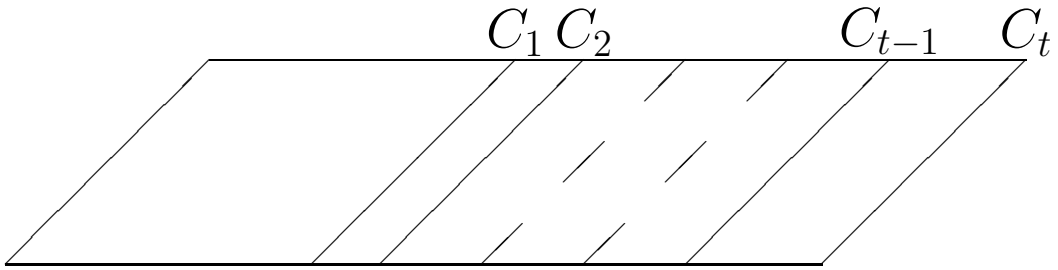
Sfruttare le caratteristiche di alcune classi di giochi

Gioco dell'aeroporto (Airport game - Littlechild e Thompson, 1977)

Ripartire il costo di costruzione e manutenzione della pista tra differenti tipi di aerei

Gli aerei sono raggruppati in t sottoinsiemi disgiunti $N_1, \ldots, N_t$

Gli aerei di N_i richiedono una pista di costo C_i con $C_i < C_{i+1}$



Si definisce il gioco:

$$v(S) = C_{j(S)}$$

dove $j(S) = max\ \{i | S \cap N_i \neq \emptyset\}$

Il valore di Shapley di ogni aereo corrisponde alla seguente ripartizione dei costi:

- Il costo del primo tratto di pista C_1 è diviso tra tutti gli aerei, poichè tutti lo utilizzano;
- Il costo del secondo tratto di pista $C_2 - C_1$ è diviso tra gli aerei dei sottoinsiemi $N_2, \ldots, N_t$ che sono quelli che lo utilizzano;
- Il costo dell'ultimo tratto di pista $C_t - C_{t-1}$ che è diviso tra gli aerei del sottoinsieme N_t che sono gli unici che lo utilizzano.

Questo criterio è facilmente applicabile anche nel caso di molti aerei

Esempio 9.2 (Gioco dell'aeroporto)

$$N_1 = \{1, 2, 3\}; N_2 = \{4, 5, 6, 7\}; N_3 = \{8, 9, 10\}$$
$$C_1 = 20; C_2 = 27; C_3 = 33$$
$$\phi_1 = \frac{20}{10} = 2$$
$$\phi_2 = \frac{20}{10} + \frac{27-20}{7} = 3$$
$$\phi_3 = \frac{20}{10} + \frac{27-20}{7} + \frac{33-27}{3} = 5$$

La verifica utilizza gli assiomi di Shapley (Littlechild e Owen, 1973)
Si definiscono t giochi $v_1, \ldots, v_t$ con il gioco v_i relativo al tratto di pista i:

$$v_i(S) = \begin{cases} C_i - C_{i-1} & se\ i \leq j(S) \\ 0 & se\ i > j(S) \end{cases}$$

dove $C_0 = 0$
A questo punto si osserva che:

1. gli aerei di $N_1, \ldots, N_{i-1}$ sono dummy per il gioco v_i
2. gli aerei di $N_i, \ldots, N_t$ sono simmetrici per il gioco v_i
3. v è dato dalla somma dei giochi v_i

9.1.3 Un'applicazione del valore di Shapley

Esempio 9.3 (Consiglio dell'UE 1958-1973) *Il valore di Shapley permette di evidenziare un difetto nei pesi assegnati nel Consiglio dell'UE del 1958*

quota$_{1958}$ *= 11 (17×0.7 = 11.9);* *quota*$_{1973}$ *= 40 (58×0.7 = 40.6)*

	1958			1973		
Paesi	Peso	%	Shapley	Peso	%	Shapley
Francia	4	23.53	0.233	10	17.24	0.179
Germania	4	23.53	0.233	10	17.24	0.179
Italia	4	23.53	0.233	10	17.24	0.179
Belgio	2	11.76	0.150	5	8.62	0.081
Paesi Bassi	2	11.76	0.150	5	8.62	0.081
Lussemburgo	1	5.88	0.000	2	3.45	0.010
Regno Unito	-	-	-	10	17.24	0.179
Danimarca	-	-	-	3	5.17	0.057
Irlanda	-	-	-	3	5.17	0.057
Totale	17	100.00	1.000	58	100.00	1.000

9.2 Indice di Banzhaf-Coleman (1965, 1971)

Definizione 9.2 *Si chiama indice di Banzhaf-Coleman il vettore $\psi(v)$ la cui componente ψ_i è il contributo marginale medio del giocatore i rispetto alle possibili coalizioni a cui appartiene:*

$$\psi_i(v) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{S \subseteq N, i \in S} [v(S) - v(S \setminus \{i\})]$$

Questo indice non è un'imputazione poichè non è efficiente

9.3 Indice di Banzhaf-Coleman normalizzato

Per un gioco semplice, si può normalizzare a 1 l'indice precedente, oppure si può evidenziare il ruolo di ciascun giocatore

Definizione 9.3 *Si chiama contributo vincente del giocatore i per un gioco semplice monotono v, il numero di casi in cui la sua presenza rende vincente una coalizione o* swing*:*

$$\vartheta_i(v) = \sum_{S \subseteq N, i \in S} [v(S) - v(S \setminus \{i\})]$$

Definizione 9.4 *Si chiama indice di Banzhaf-Coleman normalizzato per un gioco semplice monotono v, il vettore $\beta(v)$ la cui componente i è il rapporto tra il contributo vincente del giocatore i e la somma dei contributi vincenti di tutti i giocatori:*

$$\beta_i(v) = \frac{\vartheta_i(v)}{\sum_{j \in N} \vartheta_j(v)}$$

Questo indice è un'imputazione

9.4 Indice di Deegan-Packel (1978)

Richiede che il gioco sia semplice e monotono
Considera equivalenti tutte le coalizioni vincenti minimali e, per ciascuna di esse, tutti i componenti

Dato un gioco $G = (N, v)$, sia $\mathcal{W} = \{S_1, ..., S_m\}$ l'insieme delle coalizioni vincenti minimali:

$$\delta_i(v) = \sum_{S_j \ni i; S_j \in \mathcal{W}} \frac{1}{m} \frac{1}{s_j}, \forall\ i \in N$$

Questo indice è efficiente, ma non è monotono rispetto ai giocatori

Esempio 9.4 (Non monotonia) *Si consideri il gioco di maggioranza pesata definito da* $(50; 26, 25, 25, 23, 1)$*; le coalizioni vincenti minimali sono:*

$$\mathcal{W} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}\}$$

per cui l'indice di Deegan-Packel è:

$$\delta(v) = \left(\frac{6}{24}, \frac{7}{24}, \frac{7}{24}, \frac{2}{24}, \frac{2}{24}\right)$$

e quindi i giocatori 2 e 3 hanno un "potere" superiore al giocatore 1 pur avendo quote inferiori

Come raffronto si ha:

$$\varphi(v) = \left(\frac{22}{60}, \frac{17}{60}, \frac{17}{60}, \frac{2}{60}, \frac{2}{60}\right)$$

$$\beta(v) = \left(\frac{9}{16}, \frac{7}{16}, \frac{7}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}\right)$$

♢

9.5 Indice dei beni pubblici (*Public Goods Index* - Holler, 1982)

Richiede che il gioco sia semplice e monotono
Dipende solo dal numero di coalizioni vincenti minimali a cui cascun giocatore appartiene, trascurando la loro cardinalità

Dato un gioco $G = (N, v)$, sia $w_i, i \in N$ il numero di coalizioni vincenti minimali comprendenti il giocatore i:

$$h_i(v) = \frac{w_i}{\sum_{j \in N} w_j}, \forall\ i \in N$$

Anche questo indice è efficiente, ma non è monotono rispetto ai giocatori, come mostra il precedente Esempio 9.4:

$$h(v) = \left(\frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$$

9.6 Indice di Johnston (1978)

Richiede che il gioco sia semplice e monotono
Considera equivalenti tutte coalizioni vincenti quasi-minimali e, per ciascuna di esse, tutti i giocatori critici

Definizione 9.5 *Dato un gioco $G = (N, v)$, una coalizione vincente S è detta vincente quasi-minimale se esiste $i \in S$ tale che $S \setminus \{i\}$ è perdente*

In questo caso il giocatore i è detto critico per la coalizione S

Dato un gioco $G = (N, v)$, sia $\mathcal{W}^q = \{S_1, ..., S_\ell\}$ l'insieme delle coalizioni vincenti quasi-minimali
Sia c_{S_j} il numero di giocatori critici di $S_j \in \mathcal{W}^q$
Sia $\mathcal{W}_i^q$ l'insieme delle coalizioni vincenti quasi-minimali per cui il giocatore i è critico:

$$\gamma_i(v) = \sum_{S_j \in \mathcal{W}_i^q} \frac{1}{\ell} \frac{1}{c_{S_j}}, \forall\ i \in N$$

L'indice di Johnston è efficiente e coincide con l'indice di Deegan-Packel se $\mathcal{W} = \mathcal{W}^q$

Esempio 9.5 *Si consideri il gioco dell'Esempio 9.4; le coalizioni vincenti quasi-minimali sono:*

$$\mathcal{W}^q = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3,4\},\{2,3,5\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{1,3,4\},\{1,3,5\},\{1,2,4,5\},\{1,3,4,5\},\{2,3,4,5\}\}$$

per cui l'indice di Johnston è:

$$\gamma(v) = \left(\frac{30}{72}, \frac{19}{72}, \frac{19}{72}, \frac{2}{72}, \frac{2}{72}\right)$$

$\diamondsuit$

9.7 Nucleolo (Schmeidler, 1969)

Si basa sull'idea di minimizzare il massimo "malcontento"
Principio di Rawls: massimizzare l'utilità dell'agente che ottiene il peggior risultato

Definizione 9.6 *Dato un gioco v, sia S una coalizione e x una possibile ripartizione del valore del gioco; si dice rimpianto o eccesso di S rispetto ad x la quantità:*

$$e(S, x) = v(S) - x(S)$$

Nel caso di un cost game il rimpianto è $x(S) - c(S)$

- Nella definizione precedente x è una ripartizione del valore del gioco in quanto deve soddisfare solo l'ipotesi di efficienza; in questo caso talvolta si usano i termini preimputazione e prenucleolo per indicare che non si tiene conto della razionalità individuale

E' possibile definire il vettore $\vartheta(x) \in \mathbb{R}^{2^n}$:

$$\vartheta_1(x) = max\ \{e(S, x)|S \subset N\} = e(S_1, x)$$
$$\vartheta_i(x) = max\ \{e(S, x)|S \subset N, S \neq S_j, j = 1, \ldots, i-1\} = e(S_i, x) \qquad i = 2, \ldots, 2^n$$

Le componenti di $\vartheta(x)$ sono i rimpianti generati da x al variare di S, in ordine debolmente decrescente

Esempio 9.6 (Vettore degli eccessi) *Sia dato il gioco:*

$$N = \{1, 2, 3\}$$
$$v(1) = v(2) = v(3) = 0; v(12) = 2; v(13) = v(23) = 3; v(N) = 5$$

Data la ripartizione $x = (3, 1, 1)$ *si ha:*

$$e(1, x) = -3; e(2, x) = -1; e(3, x) = -1; e(12, x) = -2; e(13, x) = -1; e(23, x) = 1; e(N, x) = 0$$

e quindi:

$$\vartheta(x) = (1, 0, -1, -1, -1, -2, -3)$$

$\diamondsuit$

Definizione 9.7 *Dati due vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$, si dice che x è lessicograficamente minore di y e si indica con $x <_L y$, se esiste $i \geq 1$ per cui:*

$$x_j = y_j \qquad j < i$$
$$x_i < y_i$$

Definizione 9.8 *Dato un gioco v si dice nucleolo del gioco il vettore $\nu(X)$ che genera il minimo, secondo l'ordine lessicografico, dei vettori $\vartheta(x)$ al variare di x nell'insieme X delle possibili ripartizioni*

- Il nucleolo è un elemento del nucleo se è non vuoto, per cui costituisce un concetto di soluzione per i giochi a nucleo vuoto, ma permette anche di "scegliere" un elemento del nucleo

Esempio 9.7 (Ordine lessicografico) *Sia dato il seguente gioco:*

$$N = \{1, 2\}$$
$$v(1) = 1; v(2) = 3; v(12) = 8$$

Dati $x = (6, 2)$ *e* $y = (3, 5)$ *si ha:*

$$e(1, x) = -5; e(2, x) = 1; e(12, x) = 0$$
$$e(1, y) = -2; e(2, y) = -2; e(12, y) = 0$$

e quindi $\vartheta(x) = (1, 0, -5)$ *e* $\vartheta(y) = (0, -2, -2)$ *per cui* $\vartheta(y) <_L \vartheta(x)$

Si può verificare che $y = \nu(X)$ ♢

Proprietà

Se X è non vuoto, compatto e convesso allora $\nu(X)$ esiste ed è unico

9.7.1 Calcolo del nucleolo

Algoritmo di Kopelowitz (1967)

Il massimo rimpianto delle coalizioni è rappresentato da α:

$$v(S) - x(S) \leq \alpha \qquad \forall\ S \subset N$$

E' sufficiente cercare il minimo di α

La grande coalizione viene esclusa poichè il suo rimpianto è sempre nullo

α non è vincolata in segno

$$\begin{aligned} & min\ \ \alpha \\ & s.t.\quad \sum_{i \in N} x_i = v(N) \\ & \qquad \sum_{i \in S} x_i + \alpha \geq v(S) \qquad \forall\ S \subset N \end{aligned}$$

Se la soluzione non è unica si itera l'algoritmo, conservando il massimo rimpianto ottenuto

Detto S_0 l'insieme delle coalizioni leganti, la nuova ripartizione deve minimizzare il massimo rimpianto per le altre coalizioni, senza incrementare il rimpianto per le coalizioni di S_0, per cui si riscrivono i vincoli:

$$\sum_{i \in S} x_i = v(S) - \alpha_0 \qquad \forall\ S \in S_0$$

Si ottengono α_1 e S_1; iterando dopo al più n iterazioni la soluzione è unica e costituisce il nucleolo del gioco

Esempio 9.8 (Calcolo del nucleolo) *Sia dato il seguente gioco:*

$$N = \{1, 2, 3\}$$
$$v(1) = v(2) = v(3) = 0; v(12) = 2; v(13) = 3; v(23) = 5; v(N) = 6$$

Il primo problema è:

$$\begin{aligned} min \;\; & \alpha \\ s.t. \;\; & x_1 + x_2 + x_3 = v(N) = 6 \\ & x_1 + x_2 + \alpha \geq v(12) = 2 \\ & x_1 + x_3 + \alpha \geq v(13) = 3 \\ & x_2 + x_3 + \alpha \geq v(23) = 5 \\ & x_1 + \alpha \geq v(1) = 0 \\ & x_2 + \alpha \geq v(2) = 0 \\ & x_3 + \alpha \geq v(3) = 0 \end{aligned}$$

In forma tabellare:

	x_1	x_2	x_3	α^+	α^-	
v_1	1	1	1	0	0	-6
u_2	1	1	0	1	-1	-2
u_3	1	0	1	1	-1	-3
u_4	0	1	1	1	-1	-5
u_5	1	0	0	1	-1	0
u_6	0	1	0	1	-1	0
u_7	0	0	1	1	-1	0
$-z$	0	0	0	-1	1	0

	v_1	u_4	u_3	α^+	u_5	
x_1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
u_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_3	0	0	1	0	-1	3
x_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
α^-	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
u_6	0	1	-1	0	1	2
u_7	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
$-z$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

La soluzione ottimale è $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 3\right)$ *con* $\alpha_0 = -\frac{1}{2}$ *e* $S_0 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$

La soluzione non è unica; si itera riscrivendo i vincoli associati alle coalizioni in S_0

Il secondo problema è:

$$
\begin{aligned}
min \;\; & \alpha \\
s.t. \;\; & x_1 + x_2 + x_3 = v(N) = 6 \\
& x_1 + x_2 + \alpha \geq v(12) = 2 \\
& x_1 + x_3 + \alpha \geq v(13) = 3 \\
& x_2 + x_3 = v(23) - \alpha_0 = \tfrac{11}{2} \\
& x_1 = v(1) - \alpha_0 = \tfrac{1}{2} \\
& x_2 + \alpha \geq v(2) = 0 \\
& x_3 + \alpha \geq v(3) = 0
\end{aligned}
$$

In forma tabellare:

	x_1	x_2	x_3	α^+	α^-	
v_1	1	1	1	0	0	-6
u_2	1	1	0	1	-1	-2
u_3	1	0	1	1	-1	-3
v_4	0	1	1	0	0	$-\frac{11}{2}$
v_5	1	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$
u_6	0	1	0	1	-1	0
u_7	0	0	1	1	-1	0
$-z$	0	0	0	-1	1	0

	v_1	v_4	u_3	α^+	u_2	
x_1	1	-1	0	0	0	$\frac{1}{2}$
α^-	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
x_3	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{13}{4}$
x_2	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{4}$
v_5	1	-1	0	0	0	0
u_6	-1	1	0	0	1	$\frac{3}{2}$
u_7	-1	1	1	0	0	$\frac{5}{2}$
$-z$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$

La soluzione ottimale è $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}, \frac{13}{4}\right)$ *con* $\alpha_1 = -\frac{3}{4}$ *e* $S_1 = \{\{1,2\},\{1,3\}\}$

La soluzione è unica e la ripartizione trovata costituisce il nucleolo ♢

10 Bankruptcy game

Allocazione di una risorsa insufficiente

$$\mathcal{B} = (N, c, E) = (E; c_1, ..., c_n)$$

dove	$N = \{1, ..., n\}$	insieme dei creditori
	$c = \{c_1, ..., c_n\}$	vettore delle richieste
	E	capitale, con $E < \sum_{i \in N} c_i = C$

Ogni ripartizione ammissibile ("razionale") del capitale, $x = \{x_1, ..., x_n\}$ deve soddisfare:

$$\sum_{i \in N} x_i = E$$
$$0 \leq x_i \leq c_i, \qquad i \in N$$

Soluzioni

- $PROP$ - Le quote assegnate sono proporzionali alle richieste di ciascuno:

$$PROP_i = \frac{c_i}{C}E \qquad i \in N$$

- CEA - Le quote assegnate sono uguali per tutti, col vincolo di non superare le richieste di ciascuno:

$$CEA_i = \min(\alpha, c_i) \qquad i \in N$$

  dove α è l'unico valore reale positivo per cui $\sum_{i \in N} CEA_i = E$

- CEL - Le quote assegnate sono uguali alle richieste di ciascuno diminuite di una quantità uguale per tutti, col vincolo di non assegnare quote negative:

$$CEL_i = \max(c_i - \beta, 0) \qquad i \in N$$

  dove β è l'unico valore reale positivo per cui $\sum_{i \in N} CEL_i = E$

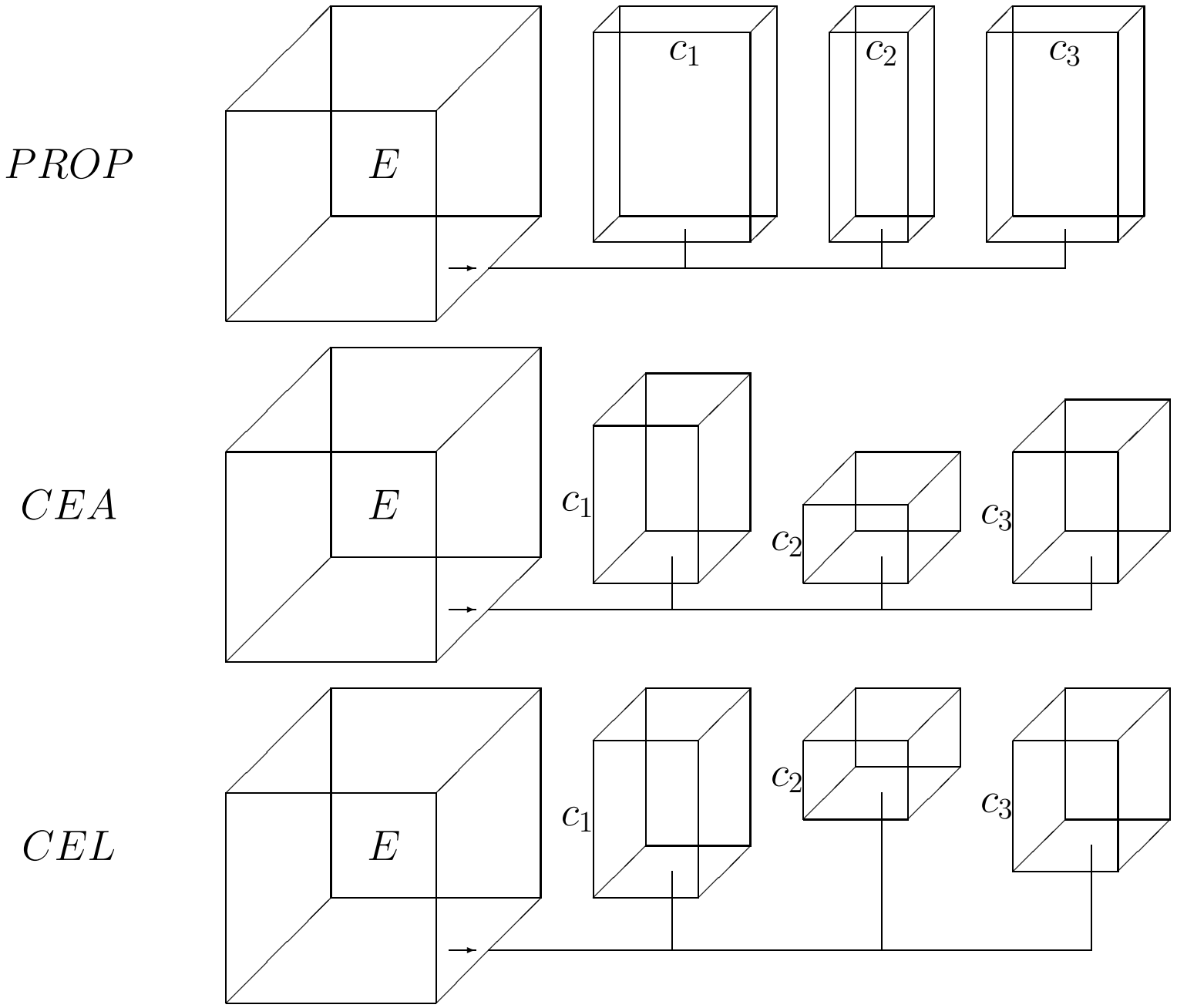
Esempio 10.1 (Soluzioni) *Si consideri il problema di bancarotta* $(15; 3, 6, 7, 14)$

$$PROP = (1.5, 3, 3.5, 7)$$
$$CEA = (3, 4, 4, 4)$$
$$CEL = (0, 2, 3, 10)$$

♢

$PROP$ è la soluzione più intuitiva
CEA è quella che più protegge i piccoli creditori
CEL è quella più favorevole ai grossi creditori

Interpretazione dei vasi comunicanti



Si possono definire due giochi TU, uno pessimistico, (N, v_P), e uno ottimistico, (N, v_O), con:

$$v_P(S) = max\left(0, E - \sum_{i \in N \setminus S} c_i\right) \qquad S \subseteq N$$

$$v_O(S) = min\left(E, \sum_{i \in S} c_i\right) \qquad S \subseteq N$$

Esempio 10.2 (Inconsistenza del gioco ottimistico) *Si consideri il problema di bancarotta* $(5; 3, 4)$. *I due giochi sono definiti rispettivamente da:*

$$v_O(1) = 3; v_O(2) = 4; v_O(12) = 5$$
$$v_P(1) = 1; v_P(2) = 2; v_P(12) = 5$$

per cui il gioco ottimistico dice che i due giocatori separatamente possono ottenere rispettivamente 3 *e* 4, *mentre il capitale è solo* 5 ♢

Il nucleo del gioco pessimistico coincide con l'insieme delle soluzioni ammissibili del problema di bancarotta:

$$x \in core(v_P) \iff \begin{cases} \sum_{i \in N} x_i = E \\ 0 \le x_i \le c_i, \qquad i \in N \end{cases}$$

"⇒" La prima è la condizione di efficienza
Per la seconda condizione per ogni $i \in N$ si ha $x_i \ge v_P(i) \ge 0$ e $E - x_i = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j \ge v_P(N \setminus \{i\}) \ge E - c_i \Rightarrow x_i \le c_i$

"⇐" La condizione di efficienza è ovviamente soddisfatta
Per ogni $S \subset N$ si hanno due casi:

1) se $v_P(S) = 0 \le \sum_{i \in S} x_i$

2) se $v_P(S) = E - \sum_{i \in N \setminus S} c_i \le E - \sum_{i \in N \setminus S} x_i = \sum_{i \in S} x_i$

11 Weighted majority game

Problema di maggioranza pesata

$$\mathcal{W} = (N, w, q) = [q; w_1, ..., w_n]$$

dove $N = \{1, ..., n\}$ insieme dei consiglieri
$w = \{w_1, ..., w_n\}$ vettore dei "pesi"
q quota di maggioranza, con $q < \sum_{i \in N} w_i$

E' possibile associare al problema il gioco TU semplice 0-1 (N, v) con:

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{se } \sum_{i \in S} w_i \geq q \ \ (S \text{ è detta vincente}) \\ 0 & \text{se } \sum_{i \in S} w_i < q \ \ (S \text{ è detta perdente}) \end{cases}$$

Il gioco risulta monotono
Se $q \geq \frac{1}{2} \sum_{i \in N} w_i$ allora è *proprio*, cioè se S è vincente $N \setminus S$ è perdente

Questi giochi sono più utilizzati nei consigli di amministrazione che in politica

Un giocatore i è detto *giocatore di veto* se $v(S) = 0$ se $i \notin S$
Detto V l'insieme dei giocatori di veto e data una allocazione x tale che $\sum_{i \in N} x_i = 1, x_i \geq 0, i \in N$ si ha:

$$x \in core(v) \iff \sum_{i \in V} x_i = 1$$

"$\Rightarrow$" E' sufficiente verificare che $x_i = 0, i \in N \setminus V$
$i \in N \setminus V \Rightarrow v(N \setminus \{i\}) = 1$ (altrimenti i sarebbe di veto) per cui $\sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j = 1 \Rightarrow x_i = 0$

"$\Leftarrow$" Per ogni $S \subset N$ si hanno due casi:
1) $v(S) = 0 \leq \sum_{i \in S} x_i$
2) $v(S) = 1 \Rightarrow V \subseteq S \Rightarrow \sum_{i \in S} x_i \geq \sum_{i \in V} x_i = 1$

- Se il giocatore i è di veto non è vero che $i \in S \Rightarrow v(S) = 1$
- Un giocatore i è detto *dittatore* se $v(S) = 1$ se e solo se $i \in S$

Esempio 11.1 (Consiglio di sicurezza dell'ONU) *Il Consiglio di sicurezza dell'ONU è composto da cinque membri permanenti con diritto di veto e dieci membri eletti. Un provvedimento su questioni sostanziali è approvato se riceve almeno 9 voti e nessun veto. Questo problema può essere rappresentato come* $[39; 7, 7, 7, 7, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$ $\diamondsuit$

12 Sequencing game

Problema di sequenziamento (ordinamento di operazioni)

$$\mathcal{S} = (N, \sigma_0, \alpha, s)$$

dove	$N = \{1, ..., n\}$	insieme degli agenti
	σ_0	ordine iniziale (permutazione)
	$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$	vettore dei costi per unità di tempo
	$s = (s_1, ..., s_n)$	vettore dei tempi di servizio

$$C_\sigma = \sum_{i \in N} \alpha_i \left(\sum_{j \in P(\sigma, i)} s_j + s_i \right)$$

dove $P(\sigma, i)$ è l'insieme degli agenti che precedono i nell'ordinamento σ

Smith (1956) ha dimostrato che l'ordinamento ottimale si può ottenere ordinando gli agenti secondo indici di urgenza $u_i = \dfrac{\alpha_i}{s_i}, i \in N$ debolmente decrescenti

Esempio 12.1 (Problema di sequenziamento) *Si consideri il problema di sequenziamento definito da* $N = \{1, 2, 3\}, \sigma_0 = (1, 2, 3), \alpha = (5, 9, 8), s = (5, 3, 4)$*; il costo iniziale è* $C_{\sigma_0} = 25 + 72 + 96 = 193$ *e gli indici di urgenza sono* $u = (1, 3, 2)$*, per cui* $\sigma^* = (2, 3, 1)$ *con costo* $C_{\sigma^*} = 27 + 56 + 60 = 143$ ♢

E' possibile associare al problema il gioco TU semplice (N, v) con v definita nel modo seguente:

- una coalizione $T \subseteq N$ è detta connessa secondo σ se per ogni $i, j \in T$ e $k \in N$ si ha $\sigma(i) < \sigma(k) < \sigma(j) \Rightarrow k \in T$
- scambiando due giocatori i, j la variazione di costo è $\alpha_j s_i - \alpha_i s_j$; la variazione è positiva se e solo se $u_i < u_j$; se la variazione è negativa non si ha lo scambio
- il guadagno di uno scambio è $g_{ij} = max\{0, \alpha_j s_i - \alpha_i s_j\}$, quindi il guadagno di una coalizione T connessa secondo σ è $v(T) = \sum_{j \in T} \sum_{i \in P(\sigma,j) \cap T} g_{ij}$
- data una coalizione $S \subseteq N$, l'ordine σ induce una partizione in componenti connesse, S/σ

$$v(S) = \sum_{T \in S/\sigma} v(T) \qquad S \subset N$$

Esempio 12.2 (Sequencing game) *Riferendosi all'Esempio 12.1 si ha:*

S	1	2	3	12	13	23	123
$v(S)$	0	0	0	30	0	0	50

$v(23) = 0$ *poichè lo scambio produrrebbe una perdita, in quanto* $u_2 > u_3$

$v(13) = 0$ *perchè la coalizione non è connessa e i giocatori* 1 *e* 3 *non possono scambiarsi anche se otterrebbero un guadagno di 20 e il giocatore* 2 *avrebbe un guadagno, poichè il tempo di servizio di* 3 *è 4 e quello di* 1 *è 5* ♢

Il guadagno di un ordinamento ottimale può essere allocato con la *Equal Gain Splitting rule (EGS)* che assegna ad ogni agente $i \in N$ metà del guadagno di ciascuno scambio in cui è coinvolto:

$$EGS_i = \frac{1}{2} \sum_{k \in P(\sigma,i)} g_{ki} + \frac{1}{2} \sum_{j:i \in P(\sigma,j)} g_{ij} \qquad \forall i \in N$$

Esempio 12.3 (EGS-Rule) *Riferendosi all'Esempio 12.1 i guadagni g_{ij} sono:*

ij	12	13	21	23	31	32
g_{ij}	30	20	0	0	0	12

e conseguentemente

$$EGS_1 = \frac{1}{2}(g_{12} + g_{13}) = 25$$

$$EGS_2 = \frac{1}{2}g_{12} + \frac{1}{2}g_{23} = 15$$

$$EGS_3 = \frac{1}{2}(g_{13} + g_{23}) = 10$$

♢

- EGS appartiene sempre al nucleo, per cui questi giochi sono sempre bilanciati
- EGS non è simmetrica per i giocatori 1 e 2 che sono simmetrici per il gioco, cioè $v(S \cup \{1\}) = v(S \cup \{2\}), \forall\ S \subseteq N \setminus \{1,2\}$, ma non per il problema associato; infatti 1 può scambiarsi vantaggiosamente sia con 2 che con 3, mentre 2 può scambiarsi vantaggiosamente solo con 1
- g_{21}, g_{31}, g_{32} non vengono utilizzati perchè l'ordine iniziale dato non permette questi scambi
- Una variante è $\varepsilon - GS_i = \varepsilon \sum_{k \in P(\sigma,i)} g_{ki} + (1-\varepsilon) \sum_{j:i \in P(\sigma,j)} g_{ij}, \forall i \in N, \forall \varepsilon \in [0,1]$

Esempio 12.4 (Payoff dei giocatori) *Si consideri un problema di sequenziamento con due agenti, 1 e 2, con* $\alpha_1 = 2, s_1 = 2, \alpha_2 = 6, s_2 = 3$ *e* $\sigma_0 = (1, 2)$

Poichè $u_1 = \frac{2}{2} = 1, u_2 = \frac{6}{3} = 2$ *i giocatori possono scambiarsi con un guadagno* $g_{1,2} = \alpha_2 s_1 - \alpha_1 s_2 = 6$

Con l'ordinamento σ_0*, 1 ha un costo 4 e attende 2 unità di tempo e 2 ha un costo 30 e attende 5 unità di tempo; con l'ordinamento* $\sigma^* = (2, 1)$*, 1 ha un costo 10 (con una perdita 6) e attende 5 unità di tempo e 2 ha un costo 18 (con un guadagno 12) e attende 3 unità di tempo*

2 rimborsa la perdita di 1 e successivamente si dividono il guadagno $g_{1,2}$

Ad esempio utilizzando $EGS = (3, 3)$*, 1 attende 3 unità di tempo in più rispetto a* σ_0 *che valuta 6, e riceve 9, mentre 2 attende 2 unità di tempo in meno che valuta 12 e paga 9* $\diamondsuit$

13 Production game

Problema di produzione

$$\mathcal{P} = (N, A, (b^i)_{i \in N}, c)$$

dove
- $N = \{1, ..., n\}$ insieme degli agenti
- A matrice tecnologica del processo produttivo
- b^i vettore delle risorse dell'agente i
- c vettore dei prezzi dei beni prodotti

E' possibile associare al problema il gioco TU (N, v), dove:

$$v(S) = max\ \{c^T z | Az \leq b^S, z \geq 0\} \qquad S \subseteq N$$

con $b^S = \sum_{i \in S} b^i$ rappresenta le risorse possedute dalla coalizione S

Il nucleo di un gioco di produzione contiene le imputazioni x tali che $x_i = b^{iT} u^*$ dove u^* è una soluzione ottimale del duale del problema di produzione:

$$\begin{aligned} max\ \ & c^T z \\ s.t.\ \ & Az \leq b^N \\ & z \geq 0 \end{aligned}$$

- Il risultato precedente può essere esteso a tutti i giochi originati da un problema lineare (Teorema di Owen, 1975)

Indice

1 Calcolo dell'equilibrio di Nash in strategie miste **1**

2 Inefficienza dell'equilibrio di Nash e instabilità **3**

3 Strategie correlate **6**
3.1 Equilibrio correlato 7

4 Informazione **8**
4.1 Informazione perfetta e imperfetta 8
4.2 Informazione incompleta 10

5 Duopolio **17**
5.1 Il modello di Cournot - 1838 18
5.2 Soluzione dinamica (Best-reply) 23
5.3 Il modello di Bertrand - 1883 25
5.4 Il modello di Stackelberg - 1934 30
5.5 Confronto tra i modelli 34

5.6 Il modello di Hotelling - 1929 38
5.7 Duopolio con prodotti differenziati (Morgan and Shy, 1996) 41

6 Aste **47**
6.1 Tipi d'asta 56
6.2 Equivalenze 60
6.3 Strategie d'asta 61
6.4 Rovina del vincitore 63
6.5 Collusioni 64
6.6 Aste multiple 65

7 Giochi cooperativi **67**
7.1 Introduzione 67
7.1.1 Funzione caratteristica per un gioco TU 69
7.2 Giochi cooperativi senza pagamenti laterali 74
7.3 Problema di contrattazione a due giocatori senza pagamenti laterali 75
7.3.1 Soluzione assiomatica di Nash (1950) 77
7.3.2 Altre soluzioni 83
7.4 Giochi cooperativi a pagamenti laterali 87

8 Soluzioni insiemistiche di un gioco TU **92**
8.1 Imputazioni 92
8.2 Insiemi stabili 95
8.3 Nucleo 98
8.3.1 Bilanciamento 100
8.4 Assignment game 104

9 Soluzioni puntuali di un gioco TU **109**
9.1 Valore di Shapley (1953) 109
9.1.1 Assiomi di Shapley 112
9.1.2 Calcolo del valore di Shapley 114
9.1.3 Un'applicazione del valore di Shapley 118
9.2 Indice di Banzhaf-Coleman (1965, 1971) 120
9.3 Indice di Banzhaf-Coleman normalizzato 121
9.4 Indice di Deegan-Packel (1978) 122
9.5 Indice dei beni pubblici (*Public Goods Index* - Holler, 1982) 124
9.6 Indice di Johnston (1978) 125
9.7 Nucleolo (Schmeidler, 1969) 127
9.7.1 Calcolo del nucleolo 131

10 Bankruptcy game **136**

11 Weighted majority game **142**

12 Sequencing game **144**

13 Production game **150**