SPAZI VETTORIALI

Definizione 1 *Un insieme K dotato di due operazioni dette somma e prodotto è detto campo se la somma è associativa, commutativa, ha un elemento neutro ed ammette l'opposto, e il prodotto è associativo, commutativo, ha un elemento neutro, ammette l'inverso ed è distributivo rispetto alla somma*

Definizione 2 *Uno spazio vettoriale su un campo K, i cui elementi sono detti* scalari, *è un insieme V, i cui elementi sono detti* vettori, *dotato di una operazione interna $+ : V \times V \to V$, detta* somma di vettori *e di una esterna $\cdot : K \times V \to V$, detta* prodotto di uno scalare per un vettore *e si indica $(V, +, \cdot)$, per cui valgono i seguenti assiomi:*

1. *$(V, +)$ è un gruppo abeliano, cioè valgono le proprietà:*

   a) *Commutativa:* $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$

   b) *Associativa:* $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

   c) *Elemento neutro:* $\exists\, \mathbf{0} \in V$ *per cui* $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} \quad \forall\, \mathbf{u} \in V$

   d) *Elemento opposto:* $\exists - \mathbf{u} \in V$ *per cui* $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \forall\, \mathbf{u} \in V$

2. *per il prodotto scalare per vettore valgono le proprietà:*

   e) *Distributiva rispetto alla somma di vettori:* $\lambda \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{u} + \lambda \cdot \mathbf{v} \quad \forall\, \lambda \in K, \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$

   f) *Distributiva rispetto alla somma di scalari:* $(\lambda + \mu) \cdot \mathbf{u} = \lambda \cdot \mathbf{u} + \mu \cdot \mathbf{u} \quad \forall\, \lambda, \mu \in K, \forall\, \mathbf{u} \in V$

   g) *Associativa rispetto al prodotto di scalari:* $\lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{u}) = (\lambda\mu) \cdot \mathbf{u} \quad \forall\, \lambda\mu \in K, \forall\, \mathbf{u} \in V$

   h) *Unitaria (elemento scalare neutro):* $\exists\, 1 \in K$ *per cui* $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \quad \forall\, \mathbf{u} \in V$

Esempio 1 *Prendendo come campo K l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ e come insieme V ancora $\mathbb{R}$, cone le usuali operazioni di somma e prodotto di numeri reali, si ottiene lo spazio vettoriale $\mathbb{R}$ e poiché il prodotto cartesiano di spazi vettoriali sullo stesso campo è ancora uno spazio vettoriale, anche $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale per ogni intero n* $\diamondsuit$

Proprietà

- Il vettore nullo è unico
- Il vettore opposto di $\mathbf{u}$ è unico
- Semplificazione rispetto alla somma: $\mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{w} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$
- Annullamento del prodotto: $\lambda \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \lambda = 0$ oppure $\mathbf{u} = \mathbf{0}$
- $(-\lambda) \cdot \mathbf{u} = -(\lambda \cdot \mathbf{u}) = \lambda \cdot (-\mathbf{u})$

Sottospazi vettoriali

Sia V spazio vettoriale su K; un sottoinsieme $U \subseteq V$ è un *sottospazio vettoriale di* V se ha la struttura di spazio vettoriale su K rispetto alla restrizione delle operazioni

Teorema 1 *U è un sottospazio vettoriale di V se e solo se:*

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$
2. $\lambda \cdot \mathbf{u} \in U \quad \forall\, \lambda \in K, \forall\, \mathbf{u} \in U$

oppure:

$\lambda \cdot \mathbf{u} + \mu \cdot \mathbf{v} \in U \quad \forall\, \lambda, \mu \in K, \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$

<u>Proprietà</u>

Se U e W sono sottospazi vettoriali di V lo è anche $U \cap W$, mentre in generale non lo è $U \cup W$

Esempio 2 *Dato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ sono sottospazi vettoriali tutti gli insiemi $\mathbb{R}^i, i = 0, ..., n$*

$\mathbb{R}^0 = \{0\}$ $\diamondsuit$

Dipendenza lineare

Definizione 3

- *Dati* n *vettori* $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n \in V$ *spazio vettoriale su un campo* K *e* n *scalari* $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in K$ *il vettore* $\mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_n\mathbf{v}_n$ *si dice* combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$ secondo gli scalari $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$
- n *vettori* $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n \in V$ *si dicono* linearmente indipendenti *se l'unica combinazione lineare che da il vettore nullo ha tutti i coefficienti nulli*
- n *vettori* $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n \in V$ *si dicono* linearmente dipendenti *se esiste una combinazione lineare che da il vettore nullo avente non tutti i coefficienti nulli*
- *Un insieme di* n *vettori* $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n \in V$ *linearmente indipendenti si dice* libero

Proprietà

$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n \in V$ sono linearmente dipendenti se e solo se uno di essi è combinazione lineare degli altri

Sia $A = \{\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n\} \subseteq V$; si dice *sottospazio vettoriale generato da* A l'insieme di tutte le combinazioni lineari dei vettori di A e si indica con $\mathcal{L}(A)$; i vettori $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ sono detti *generatori di* $\mathcal{L}(A)$

Proprietà fondamentale

Sia $A = \{\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n\}$ un insieme libero, allora ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathcal{L}(A)$ si esprime in modo unico come combinazione lineare dei vettori di A

Base e dimensione

Un insieme $B = \{\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_n\}$ libero di generatori di V è detto *base di* V

Proprietà

- Ogni vettore di V si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori di una base
- Un insieme B di generatori di V è una base di V se ogni vettore di V si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori di B

I coefficienti della combinazione lineare dei vettori di una base B che danno $\mathbf{v} \in V$ sono detti *componenti di* $\mathbf{v}$ *nella base* B

Se $\mathbf{v} = v_1\mathbf{b}_1 + \cdots + v_n\mathbf{b}_n$ allora $\mathbf{v} = (v_1, \cdots, v_n)$

Prodotto scalare di due vettori di V

Definizione 4 *Dati* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v} \in V$ *ad essi si associa uno scalare del campo* K *detto prodotto scalare e si indica con* $< \mathbf{u}, \mathbf{v} >$ *che soddisfa le seguenti condizioni:*

- *Simmetria:* $< \mathbf{u}, \mathbf{v} >=< \mathbf{v}, \mathbf{u} > \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$
- *Linearità:* $< a\mathbf{u} + b\mathbf{v}, \mathbf{w} >= a < \mathbf{u}, \mathbf{w} > +b < \mathbf{v}, \mathbf{w} > \quad \forall\, a, b \in K, \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$
- $< \mathbf{u}, \mathbf{u} >= 0 \iff \mathbf{u} = \mathbf{0}$

in $\mathbb{R}^n$ si ha anche:
Positività: $< \mathbf{u}, \mathbf{u} >\geq 0 \quad \forall\, \mathbf{u} \in V$
$\sqrt{< \mathbf{u}, \mathbf{u} >}$ è detto norma o modulo di $\mathbf{u}$
Il più comune prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ è definito come

$$< \mathbf{u}, \mathbf{v} >= u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$$

- Se $< \mathbf{u}, \mathbf{v} >$ è nullo i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono detti *ortogonali*
- Se i vettori di una base sono a due a due ortogonali la base è detta *ortogonale*; se i vettori hanno norma unitaria è detta *ortonormale*

Teorema 2 (Esistenza della base) *Dato un sistema di generatori $A = \{\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_m\}$, è sempre possibile estrarre da A una base di V*

Per ogni spazio vettoriale V esiste sempre una base e inoltre esistono infinite basi

Lemma 1 *Siano V uno spazio vettoriale su un campo K e $B = \{\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_n\}$ una base di V, allora ogni insieme libero contiene al più n vettori*

Corollario 1 *Tutte le basi di un dato spazio vettoriale V hanno lo stesso numero di vettori*

Teorema 3 (Completamento della base) *Siano $B = \{\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_n\}$ una base di V e $A = \{\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k\}$ un insieme libero, quindi $k \leq n$, allora è sempre possibile aggiungere ad A $n - k$ vettori di B in modo da ottenere una nuova base di V*

Il numero di vettori di una base è detto *dimensione di V* e si indica con $dim\ V$ o $dim(V)$

Dato uno spazio vettoriale V con $dim\ V = n$, ogni sottospazio vettoriale di V di dimensione $n - 1$ è detto *iperpiano vettoriale* o semplicemente iperpiano

Un iperpiano vettoriale è individuato dai vettori $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in V$ che soddisfano una equazione lineare $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ con $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in V$

Proprietà

- $dim(\mathbb{R}^n) = n$
- Se $dim(V) = n$ allora $n + 1$ vettori di V sono linearmente dipendenti
- Se B è un insieme di n generatori di V con $dim(V) = n$ allora B è base di V
- Se B è un insieme libero di n vettori di V con $dim(V) = n$ allora B è base di V
- Se W è un sottospazio di V allora $dim(W) \leq dim(V)$