Prova scritta di $\mathcal{MATEMATICHE}\ \mathcal{I} - \mathcal{II}\ \mathcal{B}$		20 Luglio 2017
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 1

Determinare i massimi e i minimi relativi della funzione:

$$f(x, y) = 3x^2y - 3xy + 2y^2$$

Tempo suggerito: 25 minuti
Punteggio: 15 punti

Prova scritta di $\mathcal{MATEMATICHE\ I - II\ B}$		20 Luglio 2017
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 2

Sia dato lo spazio vettoriale V delle matrici 2×2 definito sul campo $\mathbb{R}$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare; si condideri il sottoinsieme $W \subseteq V$ delle matrici per cui $a_{12} + a_{21} = 0$.

a. Verificare che W costituisce un sottospazio vettoriale.

b. Determinare una base di W.

Tempo suggerito: 25 minuti
Punteggio: 15 punti

SOLUZIONE 1:
$f_x(x,y) = 6xy - 3y$; $f_y(x,y) = 3x^2 - 3x + 4y$ che si annullano in $(0,0), (1,0)$ e $(\frac{1}{2}, \frac{3}{16})$.
$f_{xx}(x,y) = 6y$; $f_{xy}(x,y) = 6x - 3$; $f_{yx}(x,y) = 6x - 3$; $f_{yy}(x,y) = 4$
$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ il cui polinomio caratteristico è $\lambda^2 - 4\lambda - 9$ che ha radici discordi, quindi $(0,0)$ è un punto di sella.
$H(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ il cui polinomio caratteristico è $\lambda^2 - 4\lambda - 9$ che ha radici discordi, quindi $(1,0)$ è un punto di sella.
$H(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{16}) = \begin{pmatrix} \frac{9}{8} & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ il cui polinomio caratteristico è $(\frac{9}{8} - \lambda)(4 - \lambda)$ che ha radici concordi positive, quindi $(\frac{1}{2}, \frac{3}{16})$ è un punto di minimo.

SOLUZIONE 2:

a. Le matrici dell'insieme W preservano la somma:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \\ -e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & (b+e) \\ -(b+e) & c+f \end{pmatrix}$$

e il prodotto con uno scalare:

$$\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ -\lambda b & \lambda c \end{pmatrix}$$

b. Ad esempio una base di W è $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.