Prova scritta di $\mathcal{MATEMATICHE}\ \mathcal{I} - \mathcal{II}\ \mathcal{B}$		11 Settembre 2017
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 1

Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a. Determinare gli autovalori di f.

b. Determinare gli autospazi associati agli autovalori.

c. Dire se l'endomorfismo è semplice, giustificando la risposta.

Tempo suggerito: 25 minuti
Punteggio: 15 punti

Prova scritta di $\mathcal{MATEMATICHE}\ \mathcal{I} - \mathcal{II}\ \mathcal{B}$		11 Settembre 2017
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 2

Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = 2x\ cos^2 y(x) \\ y(0) = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

Tempo suggerito: 25 minuti
Punteggio: 15 punti

SOLUZIONE 1:

a. Il polinomio caratteristico è $(3-\lambda)(\lambda^2-1)$, le cui radici sono $\lambda_1 = 3; \lambda_2 = 1; \lambda_3 = -1$ e sono gli autovalori cercati.

b. Per determinare l'autospazio V_3 associato a λ_1 è sufficiente trovare il nucleo dell'endomorfismo associato alla matrice:
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$
da cui risulta $V_3 = \mathcal{L}((9,-1,2))$.
Per determinare l'autospazio V_1 associato a λ_2 è sufficiente trovare il nucleo dell'endomorfismo associato alla matrice:
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$
da cui risulta $V_1 = \mathcal{L}((1,-1,0))$.
Per determinare l'autospazio V_{-1} associato a λ_3 è sufficiente trovare il nucleo dell'endomorfismo associato alla matrice:
$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
da cui risulta $V_{-1} = \mathcal{L}((1,-1,-2))$.

c. L'endomorfismo è semplice, poichè gli autovalori hanno molteplicità algebrica unitaria.

SOLUZIONE 2:
$$\frac{y'(x)}{cos^2 y(x)} = 2x \longrightarrow \int_{\frac{\pi}{4}}^{y(x)} \frac{1}{cos^2 z} dz = \int_0^x 2s ds$$
da cui $[tgz]_{\frac{\pi}{4}}^{y(x)} = \left[s^2\right]_0^x \longrightarrow tgy(x) - tg\frac{\pi}{4} = x^2 \longrightarrow y(x) = arctg(x^2+1)$ con $x \in \mathbb{R}$.