Prova scritta di $\mathcal{MATEMATICHE}$ $\mathcal{I} - \mathcal{II}$ $\mathcal{B}$		20 Febbraio 2018
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 1

Si consideri l'omomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & 5 \\ 5 & 3 & -4 & 9 \end{pmatrix}$$

Determinare una base del nucleo di f e una base dell'immagine di f.

Tempo suggerito: 25 minuti
Punteggio: 15 punti

Prova scritta di $\mathcal{MATEMATICHE\ I-II\ B}$	20 Febbraio 2018	
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 2

Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} 2y''(x) + y'(x) - 3y(x) = 3x - 4 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$$

Tempo suggerito: 25 minuti
Punteggio: 15 punti

SOLUZIONE 1:
Riducendo la matrice col metodo di Gauss si ha:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & 5 \\ 5 & 3 & -4 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 5R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui

$$Ker\ f = \mathcal{L}((-3,2,0,1),(-1,3,1,0)); Im\ f = \mathcal{L}((1,3,5),(1,2,3))$$

SOLUZIONE 2:
È un'equazione lineare del secondo ordine, il cui polinomio caratteristico è $2\lambda^2 + \lambda - 3$ che ha radici $\lambda_1 = -\frac{3}{2}$ e $\lambda_2 = 1$.
La soluzione generale dell'omogenea associata è $y(x) = c_1 e^{-\frac{3}{2}x} + c_2 e^x$.
La soluzione particolare può essere del tipo $\bar{y}(x) = k_1 x + k_0$, con $\bar{y}'(x) = k_1, \bar{y}''(x) = 0$; sostituendo si ha $k_1 - 3k_1 x - 3k_0 = 3x - 4$ da cui $k_1 = -1, k_0 = 1$.
La soluzione generale è $y(x) = c_1 e^{-\frac{3}{2}x} + c_2 e^x - x + 1$ con $y'(x) = -\frac{3}{2} c_1 e^{-\frac{3}{2}x} + c_2 e^x - 1$; allora $y(0) = c_1 + c_2 + 2 = 2$ e $y'(0) = -\frac{3}{2} c_1 + c_2 - 1 = 4$ da cui si ottiene $c_1 = -2, c_2 = 2$ e quindi $y(x) = -2e^{-\frac{3}{2}x} + 2e^x - x + 1$.