Prova scritta di $\mathcal{MATEMATICHE}$ $\mathcal{I} - \mathcal{II}$ $\mathcal{B}$		11 Settembre 2018
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 1

Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definito da:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, -x_1 - x_2, -2x_2 + 2x_3)$$

a. Determinare la matrice associata ad f rispetto alla base canonica.

b. Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine.

Tempo suggerito: 25 minuti
Punteggio: 15 punti

Prova scritta di $\mathcal{MATEMATICHE}$ $\mathcal{I}-\mathcal{II}$ $\mathcal{B}$		11 Settembre 2018
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 2

Determinare i massimi e i minimi relativi della funzione:

$$f(x,y) = x^3 + xy + y^3$$

Tempo suggerito: 20 minuti
Punteggio: 15 punti

SOLUZIONE 1:

a. La matrice richiesta è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

b. Applicando il metodo di Gauss alla matrice si ha:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 + R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per cui a ritroso si ha $x_3 = t; x_2 = t; x_1 = -t$ e quindi $ker(f) = \mathcal{L}((-1, 1, 1)); Im(f) = \mathcal{L}((1, 1, -1, 0), (1, 0, -1, -2))$.

SOLUZIONE 2:
$f_x(x, y) = 3x^2 + y; f_y(x, y) = x + 3y^2$ che si annullano in $(0, 0)$ e $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$.
$f_{xx}(x, y) = 6x; f_{xy}(x, y) = 1; f_{yx}(x, y) = 1; f_{yy}(x, y) = 6y$
$H(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; il polinomio caratteristico è $\lambda^2 - 1$ che ha radici discordi, quindi $(0, 0)$ è un punto di sella.
$H(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; il polinomio caratteristico è $\lambda^2 + 4\lambda + 3$ che ha radici concordi negative, quindi $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}0)$ è un punto di massimo relativo.