

Prova scritta di <i>MATEMATICHE I & II – MOD B</i>		24 Settembre 2019
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
Non verranno corretti esercizi su fogli diversi da questi.

Esercizio 1

Calcolare col metodo di Gauss il determinante della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & 8 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Tempo suggerito: 25 minuti

Punteggio: 15 punti

Prova scritta di <i>MATEMATICHE I & II – MOD B</i>		24 Settembre 2019
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
Non verranno corretti esercizi su fogli diversi da questi.

Esercizio 2

Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} (x^2 + 1)y'(x) + (y(x))^2 = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Tempo suggerito: 25 minuti

Punteggio: 15 punti

SOLUZIONE 1:

Applicando il metodo di Gauss alla matrice si ha:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & 8 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -1 & -4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 + R_1} \\ \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 4R_1} \\ \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 + 4R_1} \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + 2R_2} \\ \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - R_2} \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

per cui il determinante è dato da $1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-2) = -4$.

SOLUZIONE 2:

$$\frac{y'(x)}{(y(x))^2} = -\frac{1}{x^2 + 1} \longrightarrow \int_1^{y(x)} \frac{dz}{z^2} = -\int_0^x \frac{ds}{s^2 + 1}$$

$$\text{da cui } \left[\frac{1}{z} \right]_1^{y(x)} = -[\arctg s]_0^x \longrightarrow \frac{1}{y(x)} - 1 = -\arctg x$$

$$\text{Quindi } y(x) = \frac{1}{1 - \arctg x} \text{ con } x \in]-\infty, \alpha[\text{ con } \alpha = \text{tg } 1.$$