ALGEBRA BOOLEANA

FUNZIONI LOGICHE

Andrea Bobbio
Anno Accademico 1998-1999

Funzioni Logiche

Le funzioni logiche sono ottenute dalla composizione di *operazioni logiche*.

Una funzione di variabili logiche $X, Y, Z, \ldots$

$$\Phi = F(X, Y, Z, \ldots)$$

ha come dominio il prodotto cartesiano delle sue variabili, e come immagine una variabile logica.

Φ è una variabile logica $\{0, 1\}$.

Tavola della verità di funzioni logiche

La tavola della verità di una funzione logica si ottiene valutando il valore di verità della funzione in corrispondenza di tutte le possibili combinazioni delle sue variabili.

Se la funzione Φ dipende da n variabili logiche, la tavola della verità avrà 2^n righe.

X	Y	Z	$\cdots$	$F(X, Y, Z, \ldots)$
0	0	0	$\cdots$	$\{0, 1\}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\{0, 1\}$
1	1	1	$\cdots$	$\{0, 1\}$

Minterm di funzioni logiche

Il *minterm* di ordine i di una funzione di n variabili è una funzione prodotto delle n variabili in forma diretta o in forma negata che vale 1 in corrispondenza alla sola combinazione i delle variabili.

Nel *minterm* di ordine i compaiono in forma diretta le variabili il cui valore è 1 nella tavola della verità e compaiono in forma negata le variabili il cui valore è 0 nella tavola della verità.

x	y	*minterm*
0	0	$\overline{x}\,\overline{y}$
0	1	$\overline{x}\,y$
1	0	$x\,\overline{y}$
1	1	$x\,y$

Minterm di funzioni logiche

La seguente tavola della verità riporta i *minterm* per una funzione di 3 variabili.

x	y	z	*minterm*
0	0	0	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$
0	0	1	$\overline{x}\,\overline{y}\,z$
0	1	0	$\overline{x}\,y\,\overline{z}$
0	1	1	$\overline{x}\,y\,z$
1	0	0	$x\,\overline{y}\,\overline{z}$
1	0	1	$x\,\overline{y}\,z$
1	1	0	$x\,y\,\overline{z}$
1	1	1	$x\,y\,z$

Forma canonica SP

La forma canonica *Somma di Prodotti (SP)* di una funzione logica si ottiene sommando i minterm in corrispondenza dei quali la funzione vale 1.

ESEMPIO:

Data la funzione F espressa dalla seguente tavola della verità:

x	y	z	F	*minterm*
0	0	0	1	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	$\overline{x}\,y\,z$
1	0	0	1	$x\,\overline{y}\,\overline{z}$
1	0	1	0	
1	1	0	1	$x\,y\,\overline{z}$
1	1	1	0	

$$F(x,\,y,\,z) = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,y\,z + x\,\overline{y}\,\overline{z} + x\,y\,\overline{z}$$

Maxterm di funzioni logiche

Il *maxterm* di ordine i di una funzione di n variabili è una funzione somma delle n variabili in forma diretta o in forma negata che vale 0 in corrispondenza alla sola combinazione i delle variabili.

Nel *maxterm* di ordine i compaiono in forma diretta le variabili il cui valore è 0 nella tavola della verità e compaiono in forma negata le variabili il cui valore è 1 nella tavola della verità.

x	y	*maxterm*
0	0	$x + y$
0	1	$x + \overline{y}$
1	0	$\overline{x} + y$
1	1	$\overline{x} + \overline{y}$

Maxterm di funzioni logiche

La seguente tavola della verità riporta i *maxterm* per una funzione di 3 variabili.

x	y	z	*maxterm*
0	0	0	$x + y + z$
0	0	1	$x + y + \overline{z}$
0	1	0	$x + \overline{y} + z$
0	1	1	$x + \overline{y} + \overline{z}$
1	0	0	$\overline{x} + y + z$
1	0	1	$\overline{x} + y + \overline{z}$
1	1	0	$\overline{x} + \overline{y} + z$
1	1	1	$\overline{x} + \overline{y} + \overline{z}$

Forma canonica PS

La forma canonica *Prodotto di Somme (PS)* di una funzione logica si ottiene sommando i maxterm in corrispondenza dei quali la funzione vale 0.

ESEMPIO:

Data la funzione F espressa dalla seguente tavola della verità:

x	y	z	F	*maxterm*
0	0	0	1	
0	0	1	0	$x+y+\overline{z}$
0	1	0	0	$x+\overline{y}+z$
0	1	1	1	
1	0	0	1	
1	0	1	0	$\overline{x}+y+\overline{z}$
1	1	0	1	
1	1	1	0	$\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}$

$$F(x,\,y,\,z)\;=\;(x+y+\overline{z})\cdot(x+\overline{y}+z)\cdot(\overline{x}+y+\overline{z})\cdot(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})$$

Trasformazione forme canoniche

Ogni funzione in forma canonica PS può essere trasformata in forma canonica SP e viceversa, attraverso manipolazione algebrica delle espressioni.

$$
\begin{aligned}
F(x,\,y,\,z)\;&= \\
&= (x+y+\overline{z})\cdot(x+\overline{y}+z)\cdot(\overline{x}+y+\overline{z})\cdot(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}) \\
&= (x+x\overline{y}+xz+xy+y\overline{y}+yz+x\overline{z}+\overline{y}\,\overline{z}+\overline{z}z)\cdot(\overline{x}+\overline{z}) \\
&= x\overline{z}+\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}+\overline{y}\,\overline{z}+\overline{x}yz \\
&= x(y+\overline{y})\overline{z}+\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}+(x+\overline{x})\overline{y}\,\overline{z}+\overline{x}yz \\
&= xy\overline{z}+x\overline{y}\,\overline{z}+\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}+\overline{x}yz
\end{aligned}
$$

Notazione compatta forme canoniche SP

Per la forma SP si usa la seguente notazione compatta:

$$F\;=\;\Sigma_n\,\{\,i_1,\,i_2,\,\ldots,\,i_k\,\}$$

dove n è il numero di variabili, e $i_1,\,i_2,\,\ldots,\,i_k$ il valore (espresso come numero decimale), dell'indice delle righe nella tavola della verità della funzione in cui la funzione stessa vale 1.

ESEMPIO - La funzione di pg 6 ha la seguente espressione compatta:

$$F\;=\;\Sigma_3\,\{\,0,\,3,\,4,\,6\}$$

ESEMPIO - Sia data la seguente funzione, espressa in forma compatta:

$$F\;=\;\Sigma_4\,\{\,1,\,5,\,9,\,10,\,11,\,14,\,15\}$$

Indicando con $(a,\,b,\,c,\,d,)$ le 4 variabili (nell'ordine), l'espressione canonica PS della funzione è data da:

$$F\;=\;\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}d+\overline{a}b\overline{c}d+a\overline{b}\,\overline{c}d+a\overline{b}c\overline{d}+a\overline{b}cd+abc\overline{d}+abcd$$

Notazione compatta forme canoniche PS

Per la forma PS si usa la seguente notazione compatta:

$$F\;=\;\Pi_n\,\{\,i_1,\,i_2,\,\ldots,\,i_k\,\}$$

dove n è il numero di variabili, e $i_1,\,i_2,\,\ldots,\,i_k$ il valore (espresso come numero decimale), dell'indice delle righe nella tavola della verità della funzione in cui la funzione stessa vale 0.

ESEMPIO - La funzione di pg 9 ha la seguente espressione compatta:

$$F\;=\;\Pi_3\,\{\,1,\,2,\,5,\,7\}$$

ESEMPIO - Sia data la seguente funzione, espressa in forma compatta:

$$F\;=\;\Pi_4\,\{\,0,\,2,\,12,\,15\}$$

Indicando con $(a,\,b,\,c,\,d,)$ le 4 variabili (nell'ordine), l'espressione canonica SP della funzione è data da:

$$F=(a+b+c+d)\cdot(a+b+\overline{c}+d)\cdot(\overline{a}+\overline{b}+c+d)\cdot(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+\overline{d})$$

Insiemi completi di operatori

Poichè qualsiasi funzione logica può essere espressa in forma canonica *SP* o *PS*, l'insieme degli operatori *not*, *and* e *or* costituisce un insieme completo di operatori.

Ricorrendo ai teoremi di De Morgan si può vedere che anche *not* e *and*, oppure *not* e *or* costituiscono un insieme completo di operatori.

Ricorrendo alle proprietà degli operatori *nand* e *nor*, si può vedere che ciascuno di essi, singolarmente, costituisce un insieme completo di operatori.

Si può quindi realizzare una qualunque funzione logica utilizzando circuiti che abbiano solo porte *nand* (oppure *nor*).

Logica a due livelli

Se si trascura l'operatore *not* (cioè si suppone che ogni variabile sia disponibile in forma diretta e in forma negata), qualunque funzione logica può essere rappresentata con una rete logica a due livelli.

Infatti, qualunque funzione logica può essere espressa in forma canonica *SP* o *PS*, da cui:

Forma Canonica SP - Ad un primo livello le variabili sono poste all'ingresso di porte AND, realizzando il prodotto, e le uscite delle porte AND sono poste all'ingresso di un porta OR realizzando la somma.

Forma Canonica PS - Ad un primo livello le variabili sono poste all'ingresso di porte OR, realizzando la somma, e le uscite delle porte OR sono poste all'ingresso di un porta AND realizzando il prodotto.

Logica a due livelli - Esempio

Date tre variabili a, b e c, si definisce funzione di maggioranza $F(a, b, c)$ la funzione che vale 1 quando la maggioranza delle variabili vale 1.

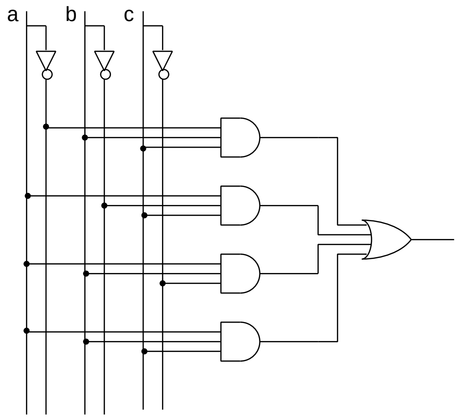
La funzione di maggioranza ha la seguente forma canonica *SP*:

a	b	c	F	*minterm*
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	$\overline{a}\,b\,c$
1	0	0	0	
1	0	1	1	$a\,\overline{b}\,c$
1	1	0	1	$a\,b\,\overline{c}$
1	1	1	1	$a\,b\,c$

$$F(a,b,c) = \overline{a}\,b\,c + a\,\overline{b}\,c + a\,b\,\overline{c} + a\,b\,c$$

Logica a due livelli - Rete Logica

La rete logica corrispondente alla funzione di maggioranza in forma canonica *SP* ha la seguente struttura:



Enumerazione di funzioni logiche

Date n variabili, esistono soltanto $2^{(2^n)}$ funzioni logiche distinte. Infatti, le configurazioni delle n variabili sono 2^n, e le possibili combinazioni di 0 e 1 che si possono costruire su 2^n configurazioni sono appunto $2^{(2^n)}$.

Tutte le possibili funzioni di due variabili sono $2^{(2^2)} = 16$ e sono elencate nel seguito:

0	0	1	1	a
0	1	0	1	b
0	0	0	0	$F_0 = 0$ (costante 0)
0	0	0	1	$F_1 = a \cdot b$ (AND)
0	0	1	0	$F_2 = a \cdot \overline{b}$ $(a\ AND\ NOT\, b)$
0	0	1	1	$F_3 = a$
0	1	0	0	$F_4 = \overline{a} \cdot b$ $(NOT\, a\ AND\ b)$
0	1	0	1	$F_5 = b$
0	1	1	0	$F_6 = a \oplus b$ (disparità XOR)
0	1	1	1	$F_7 = a + b$ (OR)
1	0	0	0	$F_8 = \overline{a} \cdot \overline{b}$ (NOR)
1	0	0	1	$F_9 = \overline{a}\overline{b} + ab$ (equivalenza $NOT\ XOR$)
1	0	1	0	$F_{10} = \overline{b}$
1	0	1	1	$F_{11} = a + \overline{b}$ (b implica a)
1	1	0	0	$F_{12} = \overline{a}$ $(NOT\, a)$
1	1	0	1	$F_{13} = \overline{a} + b$ (a implica b)
1	1	1	0	$F_{14} = \overline{a} + \overline{b}$ $(NAND)$
1	1	1	1	$F_{15} = 1$ (costante 1)

Minimizzazione di funzioni logiche

Una data funzione logica può avere infinite espressioni algebriche distinte, che possono essere ricavate l'una dall'altra attraverso la manipolazione delle espressioni secondo le regole dell'algebra booleana.

Fra le varie espressioni algebriche possibili, assumono particolare importanza le forme *minime*, che realizzano la funzione con il minimo numero di termini.

Infatti, a livello circuitale realizzativo, se si utilizza una funzione logica in forma minima si può costruire la rete logica equivalente impiegando il minimo numero di porte logiche.

ESEMPIO

$$\begin{aligned} F &= AB + AC + B\overline{C} \\ &= AB(C + \overline{C}) + AC(B + \overline{B}) + (A + \overline{A})B\overline{C} \\ &= ABC + AB\overline{C} + ABC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} \\ &= ABC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} \\ &= AC(B + \overline{B}) + B\overline{C}(A + \overline{A}) \\ &= AC + B\overline{C} \end{aligned}$$

Mappe di Karnaugh

Una mappa di Karnaugh di una funzione logica F di n variabili è una tabella costituita da 2^n elementi chiamati celle.

Ogni cella rappresenta uno dei 2^n possibili ingressi della tavola della verità della funzione.

Le mappe di Karnaugh sono costruite in modo che l'adiacenza logica (elementi a distanza di Hamming 1), si rifletta nell'adiacenza geometrica.

Nella mappa di Karnaugh ogni cella è etichettata con valore 0 o 1 a seconda del valore della funzione rappresentata, in corrispondenza della combinazione di 0 e 1 delle n variabili nella cella.

Una mappa di Karnaugh di 2^n celle, si dice di ordine n.

Mappe di Karnaugh

Data una funzione logica in forma canonica SP o PS è immediato rappresentarla mediante una mappa di Karnaugh.

Viceversa, data una mappa di Karnaugh, è possibile scrivere l'espressione algebrica della funzione rappresentata in forma canonica.

Infatti, ad ogni cella può essere assegnato il corrispondente minterm o maxterm, per cui:

- ◇ *Forma SP*
  somma dei minterm delle celle in cui la funzione vale 1;

- ◇ *Forma PS*
  prodotto dei maxterm delle celle in cui la funzione vale 0.

Mappe di Karnaugh

a \ b	0	1
0	00	01
1	10	11

Espressione delle celle

a \ b	0	1
0	0	0
1	0	1

Funzione logica AND

a \ b	0	1
0	0	1
1	1	1

Funzione logica OR

a \ b	0	1
0	0	1
1	1	0

Funzione logica XOR

a \ b	0	1
0	1	0
1	0	1

Funzione logica NOT-XOR

Mappe di Karnaugh

Si consideri la mappa di Karnaugh di tre variabili rappresentata in Figura.

a \ bc	00	01	11	10
0			1	
1			1	1

La funzione rappresentata avrà le seguenti espressioni in forma canonica:

◇ *Forma SP*

$$F(a, b, c) \;=\; \overline{a}bc + abc + ab\overline{c}$$

◇ *Forma PS*

$$F(a, b, c) \;=\; (a{+}b{+}c)(a{+}b{+}\overline{c})(\overline{a}{+}b{+}c)(\overline{a}{+}b\overline{+c})(a{+}\overline{b}{+}c)$$

Mappe di Karnaugh

Si consideri la seguente funzione logica:

$$F(a, b, c, d) \;=\; \Sigma_4\,(0, 3, 4, 7, 9, 11, 13, 14, 15)$$

Essa sarà rappresentabile dalla seguente mappa di Karnaugh:

ab \ cd	00	01	11	10
00	1		1	
01	1		1	
11		1	1	1
10		1	1	

Celle adiacenti

In una mappa di Karnaugh, si definiscono adiacenti celle che differiscono per il valore di una sola variabile (distanza di Hemming 1).

Ad esempio, nelle figure sono adiacenti le celle contrassegnate dalla stessa lettera.

a \ bc	00	01	11	10
0			x	
1	y		x	y

a \ bc	00	01	11	10
0	z			z
1	z			z

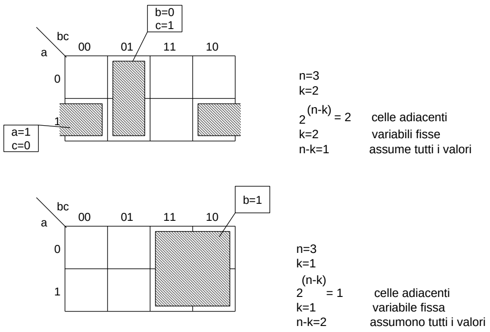
ab \ cd	00	01	11	10
00			y	
01	x			x
11		z		
10	w	z	y	w

ab \ cd	00	01	11	10
00	x			x
01	y			y
11		z	z	
10	x			x

Sottorettangolo

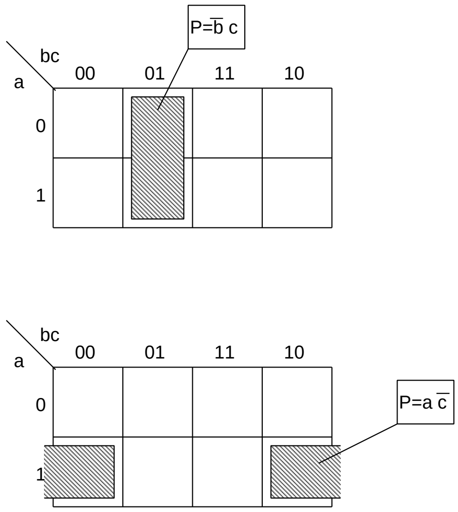
Data una mappa di Karnaugh di ordine n, si definisce *sottorettangolo* di ordine $(n-k)$ un insieme di $2^{(n-k)}$ celle adiacenti.

Tale sottorettangolo è caratterizzato dall'avere k variabili fisse e $(n-k)$ variabili che assumono tutti i valori.



Funzione Prodotto

Se una funzione P vale 1 in tutte le celle di un sottorettangolo di $2^{(n-k)}$ celle adiacenti, è esprimibile come prodotto delle k variabili fisse, prese dirette se il loro valore è 1 e prese negate se il loro valore è 0.



Implicanti

Definizione: Una funzione prodotto P si dice *implicante* di una funzione F se la funzione F vale 1 almeno in tutte le celle relative al sottorettangolo di P.

$$P \longrightarrow (\text{implica})\ F \qquad\qquad F\ {}_{\text{copre}}\ P$$

dove $\longrightarrow$ indica una *implicazione logica*.

Proprietà: Data una funzione F e un insieme dei suoi implicanti P_1, P_2, ..., P_h, se F vale 1 in tutti e soli i sottorettangoli relativi agli implicanti P_i, si può scrivere:

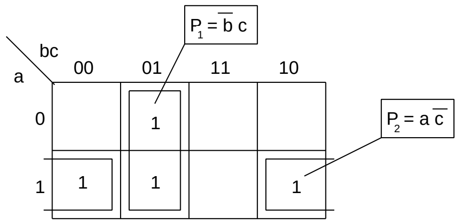
$$F = P_1 + P_2 + \ldots + P_h$$

che è una forma SP.

Ogni forma SP è una somma di implicanti.

Implicanti - Esempio

Sia data la funzione $F(a,b,c)$ rappresentata dalla seguente mappa da Karnaugh:



Si possono raggruppare le celle in cui la funzione vale 1 in due sottorettangoli caratterizzati dagli implicanti $P_1 = \overline{b}\,c$ e $P_2 = a\,\overline{c}$.

L'espressione algebrica della funzione può quindi essere scritta come:

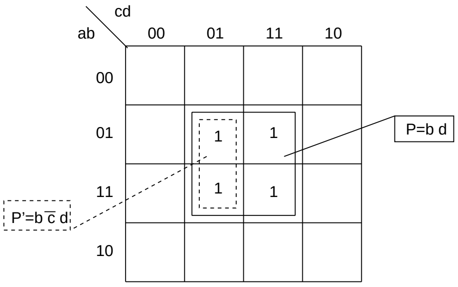
$$F(a,b,c) = \overline{b}\,c + a\,\overline{c}$$

Implicanti primi

Definizione : Un implicante $P \longrightarrow F$ si dice primo, se non esiste alcun altro implicante $P' \longrightarrow F$ tale che $P \longrightarrow P'$ (P' copre P).

Gli implicanti primi corrispondono a sottorettangoli non contenuti in sottorettangoli di ordine maggiore.

Esempio:



L'implicante $P' = b\,\overline{c}\,d$ non è primo, perchè il suo sottorettangolo è contenuto nel sottorettangolo di $P = b\,d$.

Proprietà di implicanti primi

Proprietà : Per ogni funzione logica F, esiste sempre almeno un insieme di implicanti primi $P = (P_1, \ldots, P_h)$, tali che:

$$F = \sum_{P_i \in P} P_i$$

Definizione
Insieme irridondante di implicanti primi : Un insieme $R = (P_1, \ldots, P_h)$ di implicanti primi è irridondante se:

$$F = \sum_{P_i \in R} P_i \qquad \text{e}$$

$$F \neq \sum_{P_i \in Q} P_i \qquad \forall Q \in R$$

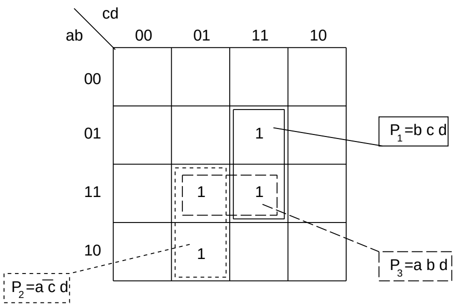
Nessun sottoinsieme Q degli implicanti di R realizza la funzione.

Proprietà : Ogni funzione logica F, può sempre essere espressa in forma SP come somma di implicanti primi irridondanti.

Implicanti primi essenziali

Definizione: Un implicante primo è *essenziale* se esiste almeno una cella del relativo sottorettangolo che non appartiene ad alcun sottorettangolo primo della funzione F.

Esempio:

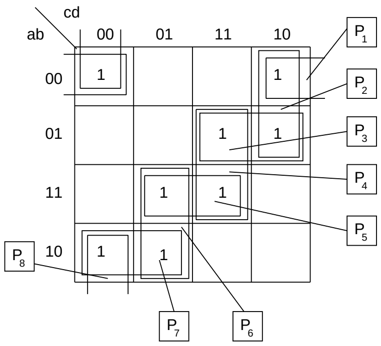


L'implicante $P_3 = a\,b\,d$ è primo ma non essenziale, perchè tutte le celle del relativo sottorettangolo sono contenute in altri implicanti primi.

Funzioni prive di implicanti primi essenziali

Una funzione logica F può essere priva di implicanti primi *essenziali*, come l'esempio in figura:

Esempio:



Per individuare una forma irridondante della funzione, si seleziona un implicante, si cancellano gli implicanti parzialmente sovrapposti al sottorentangolo selezionato, e si procede fino alla copertura di tutte le caselle.

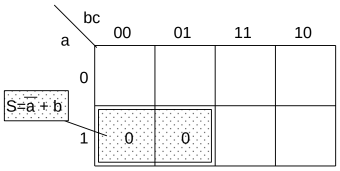
Se si seleziona arbitrariamente P_5 (che copre le caselle 1101-1111) e si cancellano P_4 e P_6 diventati inessenziali, si ricava che:

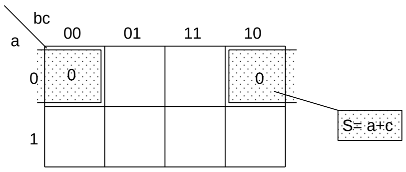
$$F = P_5 + P_3 + P_1 + P_8$$

Funzioni somma

Per le proprietà di dualità delle funzioni logiche, tutti i ragionamenti fatti guardando alle celle in cui la funzione vale 1 possono essere ripercorsi guardando le celle in cui la funzione vale 0.

Se una funzione S vale 0 in tutte le celle di un sottorettangolo di $2^{(n-k)}$ celle adiacenti, è esprimibile come *somma* delle k variabili fisse, prese dirette se il loro valore è 0 e prese negate se il loro valore è 1.





Implicati

Una funzione somma S si dice *implicato* di una funzione F se la funzione F vale 0 almeno in tutte le celle relative al sottorettangolo di S.

$$S \longleftarrow \big(\text{è implicato da}\big)\ F$$

Definizione: Un implicato è primo quando non è contenuto in sottorettangoli di ordine maggiore.

Proprietà: Ogni funzione logica F, può sempre essere espressa in forma PS come prodotto di implicati primi irridondanti.

Definizione: Un implicato primo è essenziale, se contiene una cella che non è contenuta in alcun altro implicato della funzione.

Sintesi di forme minime

Si dice che una espressione è una *forma minima* per una funzione logica, quando realizza la funzione con il minimo numero di termini.

Proprietà - Ogni forma SP (o PS) minima di una funzione F, è una forma SP (o PS) prima e irridondante.

La ricerca di una forma minima si suddivide in due fasi:

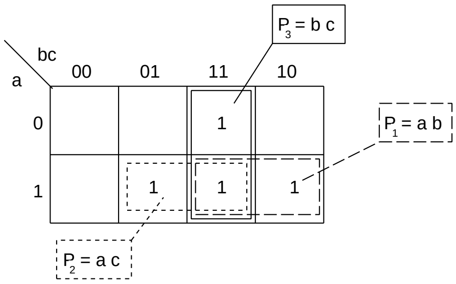
1. la determinazione di tutti gli implicanti (implicati) primi di F;
2. la selezione di un insieme irridondante di implicanti (implicati) primi, la cui somma copra la F, con il minimo numero di termini.

Per realizzare il punto 2.

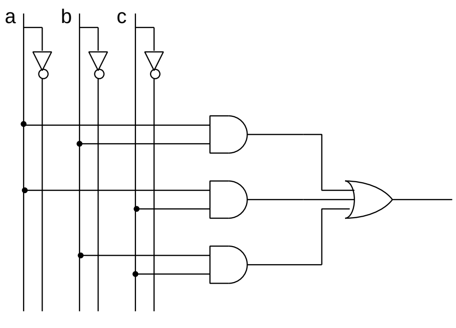
- gli implicanti (implicati) primi essenziali sono tutti contenuti nella forma minima;
- si opera una ulteriore scelta di implicanti (implicati) che copra tutte le celle in cui la funzione vale 1 (forma SP) o 0 (forma PS).

Mappe di Karnaugh - Esempio

Minimizzazione della funzione di maggioranza:



$$F(a, b, c) \ = \ ab \ + \ ac \ + \ bc$$



Minimizzazione tabellare di Quine-Mc Cluskey

La minimizzazione di funzioni logiche mediante le mappe di Karnaugh rappresenta un metodo grafico utile e intuitivo, ma applicabile a funzioni in cui il numero di variabili n non sia superiore a 5.

Inoltre il metodo non è agevolmente automatizzabile mediante programmi di calcolo.

Per queste ragioni, è stato sviluppato un metodo tabellare che prende il nome dagli ideatori Quine e Mc Cluskey, che può essere utilizzato qualunque sia il numero di variabili della funzione logica e può essere facilmente automatizzabile tramite programmi di calcolo.

Il metodo parte da una funzione logica scritta in forma canonica *SP*, e riportando i minterm della funzione in una opportuna tabella, in cui vengono raggruppati i minterm che contengono lo stesso numero di valori logici 1 delle n variabili.

Minimizzazione tabellare di Quine-Mc Cluskey

Si confrontano i minterm (implicanti) appartenenti a gruppi adiacenti e si semplificano quelli che differiscono per un solo bit (distanza di Hamming 1).

Si ripete iterativamente la procedura costruendo ad ogni passo nuove tabelle semplificate, fino a che non sono più attuabili ulteriori semplificazioni.

I termini così ottenuti sono *implicanti primi* della funzione di partenza. Da questa lista di *implicanti primi* bisogna isolare un *insieme irridondante di implicanti primi*.

La ricerca dell'*insieme irridondante di implicanti primi* viene attuata tramite la costruzione di una *tabella di copertura* che permette di individuare il numero minimo di *implicanti primi* necessari e sufficienti a coprire tutti gli implicanti della funzione di partenza.

Il metodo verrà illustrato utilizzando come esempio la seguente funzione logica di 4 variabili:

$$F = \Sigma_4(0, 2, 4, 6, 7, 9, 11, 15)$$

Minimizzazione tabellare - Esempio (1)

Passo 1 - Si scriva la funzione in forma canonica *SP*:

$$F(A, B, C, D) = \Sigma_4(0, 2, 4, 6, 7, 9, 11, 15)$$

Passo 2 - Si dispongano i minterm della funzione, suddivisi in classi, in una opportuna tabella. Le classi raggruppano i minterm della funzione che hanno lo stesso numero di variabili al valore logico 1.

No. di 1	*decimale*	*minterm*	*binario*	*marca*
0	0	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	0 0 0 0	√
1	2	$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$	0 0 1 0	√
1	4	$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$	0 1 0 0	√
2	6	$\bar{A}BC\bar{D}$	0 1 1 0	√
2	9	$A\bar{B}\bar{C}D$	1 0 0 1	√
3	7	$\bar{A}BCD$	0 1 1 1	√
3	11	$A\bar{B}CD$	1 0 1 1	√
4	15	$ABCD$	1 1 1 1	√

Passo 3 - Si confrontano gli ingressi della tabella di ogni classe con tutti gli ingressi della classe successiva. Quando due ingressi differiscono per un solo bit, vengono fusi in un unico ingresso, in una nuova tabella, in cui vengono riportati i bit coincidenti e indicato con "-" il bit diverso. Gli ingressi che vengono fusi sono marcati con (√) nella tabella di origine.

Minimizzazione tabellare - Esempio (2)

Passo 4 - Si costruisce una nuova tabella riportante gli ingressi generati per fusione dalla tabella precedente:

decimale	*binario*	*marca*
0,2	0 0 − 0	√
0,4	0 − 0 0	√
2,6	0 − 1 0	√
4,6	0 1 − 0	√
6,7	0 1 1 −	
9,11	1 0 − 1	
7,11	− 1 1 1	
11,15	1 − 1 1	

Passo 5 - Il procedimento ai passi 3 e 4 viene iterato costruendo nuove tabelle fino a che nessuna ulteriore riduzione è possibile:

decimale	*binario*	*marca*
0,2/4,6	0 − − 0	
0,4/2,6	0 − − 0	

Minimizzazione tabellare - Esempio (3)

Passo 6 - I termini non spuntati nelle successive tabelle costituiscono gli implicanti primi della funzione che possono essere posti in una lista:

$$\begin{array}{llcl}
P_1(0,2/4,6) & = \; 0 - - \; 0 & \Rightarrow & \bar{A}\,\bar{D} \\
P_2(6,7) & = \; 0\;1\;1\; - & \Rightarrow & A\,\bar{B}\,\bar{C} \\
P_3(9,11) & = \; 1\;0 - 1 & \Rightarrow & A\,\bar{B}\,D \\
P_4(7,15) & = \; - \;1\;1\;1 & \Rightarrow & B\,C\,D \\
P_5(11,15) & = \; 1 - 1\;1 & \Rightarrow & A\,C\,D
\end{array}$$

Passo 7 - Dalla lista degli implicanti primi bisogna individuare una forma irridondante minima. A tale scopo viene costruita una *tabella di copertura*.

	0	2	4	6	7	9	11	15
$P_1(0,2/4,6)$	×	×	×	×				
$P_2(6,7)$				×	×			
$P_3(9,11)$						×	×	
$P_4(7,15)$					×			×
$P_5(11,15)$							×	×

Passo 8 - Dalla tabella si vede che P_1 e P_3 sono essenziali (coprono colonne non coperte da altri implicanti). Cancellando le colonne corrispondenti, si vede che per coprire tutte le colonne con il minimo numero di termini deve essere:

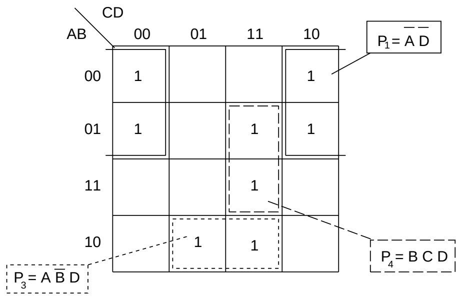
$$F \;=\; P_1 \,+\, P_3 \,+\, P_4 \;=\; \bar{A}\,\bar{D} \,+\, A\,\bar{B}\,D \,+\, B\,C\,D$$

Verifica minimizzazione tabellare

Si verifica il risultato ottenuto tramite minimizzazione tabellare mediante la mappa di Karnaugh.

Si scriva la mappa di Karnaugh della funzione:

$$F(A,B,C,D) = \Sigma_4(0,2,4,6,7,9,11,15)$$



$$F(A,B,C,D) \;=\; \bar{A}\,\bar{D} \,+\, A\,\bar{B}\,D \,+\, B\,C\,D$$