Esercizi relativi alla rappresentazione dei numeri

1. Cacolare i valori decimali dei seguenti numeri posizionali espressi in varie basi.
   $N_{(2)} = 1\,0\,0\,1\,1.1\,0\,1$
   $N_{(2)} = 1\,1\,0\,1\,1\,1.1\,1\,1$
   $N_{(7)} = 4625.32$
   $N_{(6)} = 534.01$
   $N_{(6)} = 36541.32$

   Soluzione

   $N_{(2)} = 1\,0\,0\,1\,1.1\,0\,1 \Longrightarrow 16 + 2 + 1 + 0.5 + 0.125 = 19.625_{(10)}$
   $N_{(2)} = 1\,1\,0\,1\,1\,1.1\,1\,1 \Longrightarrow 32 + 16 + 4 + 2 + 1 + 0.5 + 0.25 + 0.125 = 55.875_{(10)}$
   $N_{(7)} = 4625.32 \Longrightarrow 4 \cdot 7^3 + 6 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7 + 5 + 3 \cdot 1/7 + 2 \cdot (1/7^2) = 1685.46938\ldots_{(10)}$
   $N_{(6)} = 36541.32 \Longrightarrow$ impossibile, perchè 6 non è una cifra ammissibile in base 6
   $N_{(6)} = 534.01 \Longrightarrow 5 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6 + 4 + 0 \cdot 1/6 + 1 \cdot (1/6^2) = 202.0277\ldots_{(10)}$

2. Si deve progettare una memoria che contiene celle numerate da 0 a N. Quanto deve essere la dimensione in bit del MAR per poterla indirizzare ?

   Soluzione

   Si deve avere: $m = \lceil \ln_2(N+1) \rceil$

   per cui: $N = 1022 \Longrightarrow m = \lceil \ln_2(1023) \rceil = \lceil 9.9985\ldots \rceil = 10$

   $N = 1024 \Longrightarrow m = \lceil \ln_2(1025) \rceil = \lceil 10.0014\ldots \rceil = 11$

3. Quanti numeri si possono rappresentare in base 6 con 5 cifre. Qual'è il numero massimo rappresentabile?

   Soluzione

   Si possono rappresentare 6^5 numeri, compresi fra 0 e $6^5 - 1 = 7775_{(10)}$.

4. Convertire il numero binario $N_{(2)} = 1\,1\,0\,1\,1$ in base 10 per mezzo di un algoritmo iterativo (senza ricorrere al calcolo delle potenze della base).

Soluzione

$$
\begin{array}{llllllllll}
1 \times 2 & = & 2\,+ & & & & & & & \\
 & & \underline{\;1\;} & & & & & & & \\
 & & 3 \times 2 & = & 6\,+ & & & & & \\
 & & & & \underline{\;0\;} & & & & & \\
 & & & & 6 \times 2 & = & 12\,+ & & & \\
 & & & & & & \underline{\;\;1\;} & & & \\
 & & & & & & 13 \times 2 & = & 26\,+ & \\
 & & & & & & & & \underline{\;\;1\;} & \\
 & & & & & & & & 27 &
\end{array}
$$

5. Convertire i seguenti numeri decimali nelle basi indicate:

$$
\begin{array}{rcl}
7516_{(10)} & \Longrightarrow & (\ldots)_{(8)} \\
108_{(10)} & \Longrightarrow & (\ldots)_{(2)} \\
108_{(10)} & \Longrightarrow & (\ldots)_{(3)} \\
115_{(10)} & \Longrightarrow & (\ldots)_{(7)}
\end{array}
$$

Soluzione

$$
\begin{array}{lllllllllll}
7516 & : & 8 & & & & & & & & \\
 & & \overline{939} & : & 8 & & & & & & \text{resto } 4 \\
 & & & & \overline{117} & : & 8 & & & & \text{resto } 3 \\
 & & & & & & \overline{14} & : & 8 & & \text{resto } 5 \\
 & & & & & & & & \overline{1} & : \; 8 & \text{resto } 6 \\
 & & & & & & & & & \;\;\;\overline{0} & \text{resto } 1
\end{array}
$$

$$7516_{(10)} \Longrightarrow 16534_{(8)}$$

$$
\begin{array}{rcr}
108_{(10)} & \Longrightarrow & 1\,1\,0\,1\,1\,0\,0_{\,(2)} \\
108_{(10)} & \Longrightarrow & 1\,1\,0\,0\,0_{\,(3)} \\
115_{(10)} & \Longrightarrow & 2\,2\,3_{\,(7)}
\end{array}
$$

6. Convertire il seguente numero esadecimale $(D\,7\,A)_{(16)}$ in base 4?

Soluzione

$$
\begin{array}{cccccc}
 & D & & 7 & & A \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\underbrace{1\,1}_{3} & \underbrace{0\,1}_{1} & \underbrace{0\,1}_{0} & \underbrace{1\,1}_{3} & \underbrace{1\,0}_{2} & \underbrace{1\,0}_{2}
\end{array}
$$

7. Convertire il numero decimale 0.045_{10} in un numero binario in virgola fissa con 8 bit di parte frazionaria.

Soluzione

$$\begin{array}{rcccl@{\qquad\qquad}c}
0.045 & \times & 2 & = & 0.09 & 0 \\
0.09 & \times & 2 & = & 0.18 & 0 \\
0.18 & \times & 2 & = & 0.36 & 0 \\
0.36 & \times & 2 & = & 0.72 & 0 \\
0.72 & \times & 2 & = & 1.44 & 1 \\
0.44 & \times & 2 & = & 0.88 & 0 \\
0.88 & \times & 2 & = & 1.76 & 1 \\
0.76 & \times & 2 & = & 1.52 & 1 \\
\ldots & & & & & \ldots
\end{array}$$

$$0.0045\,_{(10)} \;=\; 0\,.\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,\ldots\,_{(2)}$$

8. Convertire il numero decimale $(44157)_{(10)}$ in base 16.

Soluzione

$$\begin{array}{llllll}
44157: & 16 & & & & \\
 & \overline{2759}: & 16 & & \text{resto } 13 & (D) \\
 & & \overline{172}: & 16 & \text{resto } 7 & (7) \\
 & & & \overline{10}: \; 16 & \text{resto } 12 & (C) \\
 & & & \quad\;\; \overline{0} & \text{resto } 10 & (A)
\end{array}$$

$$44157_{(10)} \implies AC7D_{(16)}$$

9. Si abbia una memoria da $4\,K$ celle di un byte. Quanti numeri interi da 16 bit si possono posizionare a partire dalla cella di indirizzo $(B30)_{(16)}$ fino alla fine della memoria?

Soluzione

Una memoria da $4\,K$ ha le celle numerate da 0 a $2^{12}-1 = FFF_{(16)}$.
Si possono quindi posizionare un numero di interi da 2 byte pari a (in esadecimale):

$$(FFF - B30 + 1)/2 \;=\; (4CF + 1)/2 \;=\; 268_{(16)}$$

Da cui

$$268_{(16)} \;=\; 616_{(10)}$$

10. Eseguire le seguenti operazioni nelle basi indicate:
$(EA8C \pm BD9F)_{(16)}$
$(5163 \pm 4356)_{(7)}$
$(CF07 \pm BFC9)_{(16)}$
$(4021 \pm 3132)_{(5)}$.

Soluzione

$$\begin{array}{r} EA8C \quad + \\ \underline{BD9F} \quad\ \ \\ 1A82B \quad\ \ \end{array} \qquad \begin{array}{r} EA8C \quad - \\ \underline{BD9F} \quad\ \ \\ 2CED \quad\ \ \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5163 \quad + \\ \underline{4356} \quad\ \ \\ 12552 \quad\ \ \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5163 \quad - \\ \underline{4356} \quad\ \ \\ 504 \quad\ \ \end{array}$$

$(CF07 + BFC9)_{(16)} \; = \; 18ED0_{(16)}$
$(CF07 - BFC9)_{(16)} \; = \; 0F3E_{(16)}$
$(4021 + 3132)_{(5)} \; = \; 12203_{(5)}$
$(4021 - 3132)_{(5)} \; = \; 0334_{(5)}$

11. Eseguite l'operazione $-(14)_{10} \pm (24)_{10}$ rappresentando i numeri in binario su 6 bit, una prima volta in *M&S* e, successivamente, in Complemento a due.

Soluzione

Addizione in *M&S*

$$\begin{array}{rcrcl} X & = & -14_{10} & \Rightarrow & 101110 \\ Y & = & +24_{10} & \Rightarrow & 011000 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} S(X)=1,\, S(Y)=0 \\ \\ |\, X \,|<|\, Y \,| \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} S(R) \;=\; 0 \\ \\ |\, R \,|=|\, Y \,| \;-\; |\, X \,| \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{array}{rcc} 11000 \;\; - & \rightarrow & |\, Y \,| \\ \underline{01110} \quad\;\; & \rightarrow & \underline{|\, X \,|} \\ 01010 \quad\;\; & \rightarrow & |\, R \,| \end{array}$$

$$R \;=\; 101001 \quad \Rightarrow \quad -9_{10}$$

Sottrazione in *M&S*

$$\begin{array}{rcrcl} X & = & -14_{10} & \Rightarrow & 101110 \\ Y & = & -24_{10} & \Rightarrow & 111000 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} S(X)=1,\, S(Y)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} S(R) \;=\; 1 \\ \\ |\, R \,|=|\, X \,| \;+\; |\, Y \,| \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{array}{rcc} 11000 \;\; + & \rightarrow & |\, Y \,| \\ \underline{01110} \quad\;\; & \rightarrow & \underline{|\, X \,|} \\ \text{overflow} \quad\;\; & & \end{array}$$

Addizione in *Complemento a 2*

$$\begin{array}{rcrcl} X & = & -14_{10} & \Rightarrow & 110010 \\ Y & = & +24_{10} & \Rightarrow & 011000 \end{array} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{array}{r} 110010 \;\; + \\ \underline{011000} \quad\;\; \\ 1\,|\,001010 \quad\;\; \end{array} \quad \longrightarrow \quad \text{risultato corretto}$$

Sottrazione in *Complemento a 2*

$$\begin{array}{lcllcllcl} X & = & -14_{10} & \Rightarrow & 110010 & \text{da cui} & 110010 & + & \\ Y & = & -24_{10} & \Rightarrow & 101000 & & \underline{101000} & & \\ & & & & & & 1\,|\,011010 & \longrightarrow & \text{overflow} \end{array}$$

12. Ricavate il valore decimale del seguente byte (1 0 0 1 0 1 1 0) interpretandolo come: *1)* Binario puro, *2)* Numero binario relativo in *M&S*, *3)* Numero binario relativo in Complemento a 2, *4)* Numero binario relativo in Complemento a 1, *5)* Numero BCD.

    Soluzione

    $$\begin{array}{lllr} 1) & \text{binario puro} & = & 150_{10} \\ 2) & \textit{M\&S} & = & -22_{10} \\ 3) & \text{complemento 2} & = & -106_{10} \\ 4) & \text{complemento 1} & = & -105_{10} \\ 5) & \textit{BCD} & = & 96_{10} \end{array}$$

13. In un elaboratore con un address bus a 16 bit, la memoria è costituita da blocchi di $8\,K$ celle da 1 byte. I blocchi sono numerati a partire da 0.
    Quanti blocchi di memoria si possono mettere al massimo, e in quale blocco è posizionata la cella di indirizzo $(C6BA)_{16}$?

    Soluzione
    Si possono installare, al massimo:

    $$\frac{2^{16}}{2^{13}} = 2^3 = 8 \quad \text{blocchi}$$

    Per determinare il blocco in cui è posizionata la cella di indirizzo $(C6BA)_{16}$, si converte il numero in binario e si divide per 2^{13}. Tale divisione si riduce a separare le 13 cifre meno significative (che rappresentano la posizione della cella nel blocco), e le 3 cifre più significative che danno il numero d'ordine del blocco.

    $$(C6BA)_{16} \Longrightarrow 110|0011010111010$$

    Per cui la cella indicata è nel blocco $110_2 \rightarrow 6_{10}$

14. Eseguire le sottoindicate operazioni in binario su 8 bit, supponendo una prima volta che i numeri siano codificati in Modulo e segno e una seconda volta che siano codificati in Complemento a due. Esaminare le eventuali condizioni di tracimazione (overflow).

    $$1\,0\,1\,1\,0\,1\,0\,1 \pm 0\,1\,1\,0\,0\,0\,1\,1$$

Soluzione
Consideriamo dapprima i numeri come codificati in M&S.

$$\begin{array}{lclcl} X & = & 00110101 & \Rightarrow & (+53)_{10} \\ Y & = & 11100011 & \Rightarrow & (-99)_{10} \end{array}$$

Somma:

$$\left.\begin{array}{r} S(X)=0,\ S(Y)=1 \\ \mid X \mid \leq \mid Y \mid \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} S(R) \ = \ 1 \\ \mid R \mid = \mid Y \mid \ - \ \mid X \mid \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{cccccc} 1\,1\,0\,0\,0\,1\,1 & - & \longrightarrow & \mid Y \mid & & \\ 0\,1\,1\,0\,1\,0\,1 & & \longrightarrow & \mid X \mid & & \\ \hline 0\,1\,0\,1\,1\,1\,0 & & \longrightarrow & \mid R \mid & R \ = \ 10101110 \ \Rightarrow & (-46)_{10} \end{array}$$

Differenza:

$$\left. S(X)=0,\ S(Y)=1 \right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} S(R) \ = \ 0 \\ \mid R \mid = \mid X \mid \ + \ \mid Y \mid \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rcccc} 0\,1\,1\,0\,1\,0\,1 & + & \longrightarrow & \mid X \mid & \\ 1\,1\,0\,0\,0\,1\,1 & & \longrightarrow & \mid Y \mid & \\ \hline 1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,0 & & \longrightarrow & \mid R \mid & \text{Overflow} \end{array}$$

Consideriamo ora i numeri come codificati in Complemento a due.

$$\begin{array}{lclcl} X & = & 00110101 & \Rightarrow & (+53)_{10} \\ Y & = & 11100011 & \Rightarrow & (-29)_{10} \end{array}$$

Somma:

$$\begin{array}{rcccc} 0\,0\,1\,1\,0\,1\,0\,1 & + & \longrightarrow & X & \\ 1\,1\,1\,0\,0\,0\,1\,1 & & \longrightarrow & Y & \\ \hline 1 \mid 0\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,0 & & \longrightarrow & R & \longrightarrow (+24)_{10} \end{array}$$

Differenza:

$$\begin{array}{rcccc} 0\,0\,1\,1\,0\,1\,0\,1 & + & \longrightarrow & X & \\ 0\,0\,0\,1\,1\,1\,0\,1 & & \longrightarrow & \overline{\overline{Y}} & \\ \hline 0\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,0 & & \longrightarrow & R & \longrightarrow (+82)_{10} \end{array}$$