

Esercizi sulle variabili e funzioni logiche

1. Applicando i teoremi dell'algebra di Boole, verificare se la seguente espressione è vera o falsa (questa proprietà viene, a volte, chiamata *teorema del consenso*).

$$A \cdot B + B \cdot C + \bar{A} \cdot C = A \cdot B + \bar{A} \cdot C$$

Soluzione - Si riscriva l'espressione al I membro:

$$A \cdot B + (A + \bar{A}) \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot C = A \cdot B + A \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot C$$

ma:
$$\begin{aligned} A \cdot B + A \cdot B \cdot C &= A \cdot B && \text{per il teorema dell'assorbimento} \\ \bar{A} \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot C &= \bar{A} \cdot C \end{aligned}$$

da cui:
$$A \cdot B + A \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot C = A \cdot B + \bar{A} \cdot C$$

e l'espressione è vera.

2. Si scriva la tavola della verità della seguente funzione logica, e se ne trovi una espressione minima:

$$F = a \text{ xor } b \text{ or not } (a \text{ or } b \text{ and } c)$$

Soluzione - La funzione F può essere riscritta simbolicamente come:

$$F = a \oplus b + \overline{(a + b \cdot c)}$$

Tavola della verità:

a	b	c	$a \oplus b$	$b \cdot c$	$a + b \cdot c$	$\overline{a + b \cdot c}$	F
0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	1	0	0

Usando i teoremi dell'algebra logica, si può semplificare la funzione F nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
F &= a \oplus b + \overline{(a + b \cdot c)} = \\
&= a\bar{b} + \bar{a}b + (\bar{a}(\bar{b}c)) = \\
&= a\bar{b} + \bar{a}b + (\bar{a}(\bar{b} + \bar{c})) = \\
&= a\bar{b} + \bar{a}b + \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c} = \\
&= a\bar{b} + \bar{a}(b + \bar{b}) + \bar{a}\bar{c} = \\
&= a\bar{b} + \bar{a} + \bar{a}\bar{c} = \\
&= a\bar{b} + \bar{a}(1 + \bar{c}) = \\
&= a\bar{b} + \bar{a} = \\
&= (a + \bar{a})(\bar{b} + \bar{a}) = \\
&= \bar{b} + \bar{a}
\end{aligned}$$

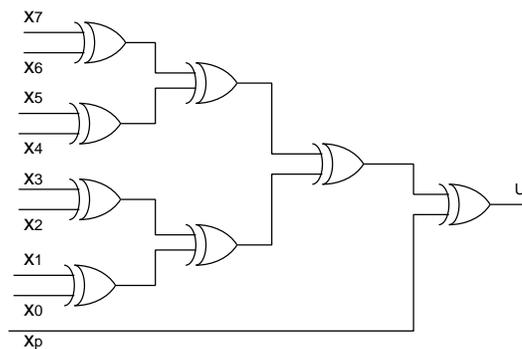
3. Applicando i teoremi dell'algebra booleana, semplificare la funzione: $F = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B + AB + A\bar{B}\bar{C}$

Soluzione - Si raccolgano fra loro il 2 e 3 termine e il 1 e il 4:

$$F = (A + \bar{A})B + (A + \bar{A})\bar{B}\bar{C} = B + \bar{B}\bar{C} = (B + \bar{B})(B + \bar{C}) = B + \bar{C}$$

4. Data una parola di 8 bit con bit di parità: $(x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, x_0, x_p)$, disegnare una rete logica a porte *XOR*, che verifichi se il numero di 1 della parola è pari o dispari.

Soluzione - La rete logica viene realizzata con una cascata di porte *XOR*, di modo che l'uscita vale $U = 1$ se il numero totale di 1 è dispari e $U = 0$ se il numero totale di 1 è pari.



5. Una cassaforte ha quattro lucchetti x, y, v e w , che devono essere tutti aperti affinché la cassaforte possa essere aperta. Le chiavi sono in possesso di tre persone A, B e C come segue:

- A possiede le chiavi v e y ;
- B possiede le chiavi v e x e w ;

- C possiede le chiavi w e y ;

Siano le variabili A , B e C uguali a 1 se la persona corrispondente è presente, uguali a 0 se assente. Formulare le seguenti risposte:

- a) Costruire la tavola della verità della funzione $f(A, B, C)$ che vale 1 se e solo se la cassaforte può essere aperta.
- b) Esprimere la funzione $f(A, B, C)$ in forma canonica SP (Somme di prodotti).
- c) Trovare le combinazioni minime di persone che permettono l'apertura della cassaforte.

6. Utilizzando solo porte *NOT*, *AND* e *OR*, disegnare una ALU a 1 bit che riceve in ingresso due variabili logiche X e Y , e due linee di controllo c_0 e c_1 , e restituisce in uscita le funzioni logiche:

$F_0 = (X \neq Y)$ (quando i bit di controllo hanno valore binario 0)

$F_1 = (X > Y)$ (quando i bit di controllo hanno valore binario 1)

$F_2 = (X \leq Y)$ (quando i bit di controllo hanno valore binario 2)

$F_3 = (X = Y)$ (quando i bit di controllo hanno valore binario 3).