**Esercizi relativi ai codici binari**

1. Si abbiano due alfabeti $A = \{@, *, \#\}$ e $B = \{0, 1\}$. Determinare quanto deve essere la lunghezza $m$ di una stringa nell'alfabeto $B$ per trasferire tutte le stringhe di 4 caratteri scritte nell'alfabeto $A$. Trovare la codifica nell'alfabeto $B$ della stringa $A = *\#@@$.

   **Soluzione**
   Tutte le stringhe di 4 caratteri scritte nell'alfabeto $A$ sono $3^4 = 81$. Per rappresentare almeno 81 parole nell'alfabeto $B$ (che ha solo due simboli) ci vogliono $m$ caratteri, con $m$ tale che:

$$m \geq \lceil \log_2 81 \rceil$$

$$\text{cioè} \qquad 2^m \geq 81 \qquad \text{da cui} \qquad m = 7$$

   Posso pensare la parola $A = *\#@@$ come scritta in base 3, da cui:

$$*\#@@ = 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2 \implies 35_{10}$$

   Riconvertendo $35_{10}$ nell'alfabeto $B$ (binario), si ottiene alla fine:

$$(*\#@@)_A \implies (100011)_B$$

2. Sommare i numeri $(465 + 638)_{10}$, esprimendoli in codice binario $BCD$.

   **Soluzione** $\quad 465_{10} \implies$ 0100 0110 0101
   $638_{10} \implies$ 0110 0011 1000

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| eventuale riporto | $\longrightarrow$ | | 0001 | 0001 | | |
| I addendo | $\longrightarrow$ | | 0100 | 0110 | 0101 | + |
| II addendo | $\longrightarrow$ | | $\underline{0110}$ | $\underline{0011}$ | $\underline{1000}$ | |
| risultati parziali | $\longrightarrow$ | | 1011 | 1010 | 1101 | + |
| addendo correttivo 0110 | $\longrightarrow$ | | $\underline{0110}$ | $\underline{0110}$ | $\underline{0110}$ | |
| risultato finale | $\longrightarrow$ | 0001 | 0001 | 0000 | 0011 | |

3. Sapendo che la lettera $A$ corrisponde al carattere ASCII $(41)_{16}$, rappresentare la codifica in byte della parola $DECIDO$.

   **Soluzione** - Valgono le seguente corrispondenze:

$$\begin{array}{ccccc} C & \rightarrow & 43_{16} & \rightarrow & 01000011 \\ D & \rightarrow & 44_{16} & \rightarrow & 01000100 \\ E & \rightarrow & 45_{16} & \rightarrow & 01000101 \\ I & \rightarrow & 49_{16} & \rightarrow & 01001001 \\ O & \rightarrow & 4F_{16} & \rightarrow & 01001111 \end{array}$$

   Da cui $\quad DECIDO \implies (44\,45\,43\,49\,44\,4F)_{16}$

4. Si codifichi la sequenza (1010) con un codice di Hamming autocorrettivo a un bit.

   **Soluzione** -

| $r_1$ | $r_2$ | $m_1$ | $r_3$ | $m_2$ | $m_3$ | $m_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

5. La seguente sequenza di 7 bit (1010100) rappresenta un codice di Hamming autocorrettivo a un bit. Ricavare la parola codificata.

   **Soluzione** - Il codice è:

| $r_1$ | $r_2$ | $m_1$ | $r_3$ | $m_2$ | $m_3$ | $m_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |

   - La sequenza 1, 3, 5, 7 è dispari ($r_1$ errato).
   - La sequenza 2, 3, 6, 7 è dispari ($r_2$ errato).
   - La sequenza 4, 5, 6, 7 è dispari ($r_3$ errato).

| $r_3$ | $r_2$ | $r_1$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 7 |

   Il bit errato è il bit 7 per cui la parola codice corretta risulta:

| $r_1$ | $r_2$ | $m_1$ | $r_3$ | $m_2$ | $m_3$ | $m_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

   La parola codificata è: $\quad m_1 m_2 m_3 m_4 = 1101$