

Esercizi sulle variabili e funzioni logiche

1. Applicando i teoremi dell'algebra di Boole, verificare se la seguente espressione è vera o falsa (questa proprietà viene, a volte, chiamata *teorema del consenso*).

$$A \cdot B + B \cdot C + \overline{A} \cdot C = A \cdot B + \overline{A} \cdot C$$

Soluzione - Si riscriva l'espressione al I membro:

$$A \cdot B + (A + \overline{A}) \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot C = A \cdot B + A \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot C$$

ma:
$$\begin{array}{l} A \cdot B + A \cdot B \cdot C = A \cdot B \\ \overline{A} \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot C = \overline{A} \cdot C \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{per il teorema dell'assorbimento} \\ \text{"} \end{array}$$

da cui: $A \cdot B + A \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot C = A \cdot B + \overline{A} \cdot C$
e l'espressione è vera.

2. Si scriva la tavola della verità della seguente funzione logica, e se ne trovi una espressione minima:

$$F = a \text{ xor } b \text{ or not } (a \text{ or } b \text{ and } c)$$

Soluzione - La funzione F può essere riscritta simbolicamente come:

$$F = a \oplus b + (\overline{a + b \cdot c})$$

Tavola della verità:

a	b	c	$a \oplus b$	$b \cdot c$	$a + b \cdot c$	$\overline{a + b \cdot c}$	F
0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	1	0	0

Usando i teoremi dell'algebra logica, si può semplificare la funzione F nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
 F &= a \oplus b + (\overline{a + b \cdot c}) = \\
 &= a\bar{b} + \bar{a}b + (\bar{a}(\overline{bc})) = \\
 &= a\bar{b} + \bar{a}b + (\bar{a}(\bar{b} + \bar{c})) = \\
 &= a\bar{b} + \bar{a}b + \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c} = \\
 &= a\bar{b} + \bar{a}(b + \bar{b}) + \bar{a}\bar{c} = \\
 &= a\bar{b} + \bar{a} + \bar{a}\bar{c} = \\
 &= a\bar{b} + \bar{a}(1 + \bar{c}) = \\
 &= a\bar{b} + \bar{a} = \\
 &= (a + \bar{a})(\bar{b} + \bar{a}) = \\
 &= \bar{b} + \bar{a}
 \end{aligned}$$

3. Data la seguente funzione $F(x, y, z)$, esprimere la forma canonica SP e PS:

$$F(x, y, z) = \bar{z}y + x\bar{y}$$

Soluzione

$$\begin{aligned}
 \text{Forma canonica SP:} \quad F &= \bar{z}y + x\bar{y} = x\bar{y} + y\bar{z} = \\
 &= x\bar{y}(z + \bar{z}) + (x + \bar{x})y\bar{z} = \\
 &= x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}
 \end{aligned}$$

Forma canonica PS:

$$\begin{aligned}
 F &= \bar{z}y + x\bar{y} = x\bar{y} + y\bar{z} = \\
 &= (x + \bar{z}y)(\bar{y} + \bar{z}y) = \\
 &= (x + \bar{z})(x + y)(\bar{y} + \bar{z})(\bar{y} + y) = \\
 &= (x + y\bar{y} + \bar{z})(x + y + z\bar{z})(x\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}) = \\
 &= (x + y + \bar{z})(x + \bar{y} + \bar{z})(x + y + z)(x + y + \bar{z})(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}) = \\
 &= (x + y + \bar{z})(x + \bar{y} + \bar{z})(x + y + z)(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z})
 \end{aligned}$$

L'ultimo passaggio si ottiene dal precedente osservando che i termini $(x + \bar{y} + \bar{z})$ e $(x + y + \bar{z})$ sono ripetuti e si eliminano per il teorema di idempotenza ($xx = x$).

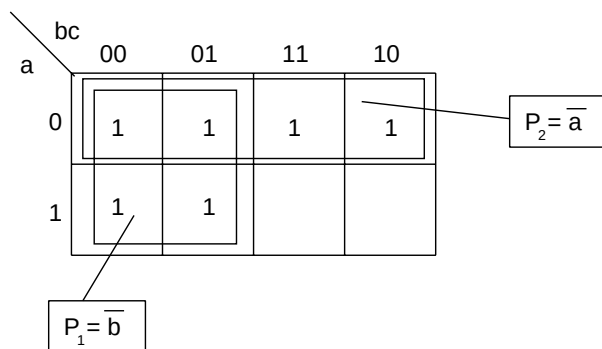
Lo stesso risultato può essere ottenuto scrivendo la tavola della verità della funzione F e ricavando la forma SP come somma di *minterm* e la forma PS come prodotto di *maxterm*.

Tavola della verità:

x	y	z	$x\bar{y}$	$y\bar{z}$	F	$minterm$	$maxterm$
0	0	0	0	0	0		$x + y + z$
0	0	1	0	0	0		$x + y + \bar{z}$
0	1	0	0	1	1	$\bar{x}y\bar{z}$	
0	1	1	0	0	0		$x + \bar{y} + \bar{z}$
1	0	0	1	0	1	$x\bar{y}\bar{z}$	
1	0	1	1	0	1	$x\bar{y}z$	
1	1	0	0	1	1	$xy\bar{z}$	
1	1	1	0	0	0		$\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$

4. Trovare una forma minima della funzione studiata nell'Esercizio 2: $F = a \oplus b + (\overline{a + b \cdot c})$, utilizzando il metodo della mappa di Karnaugh.

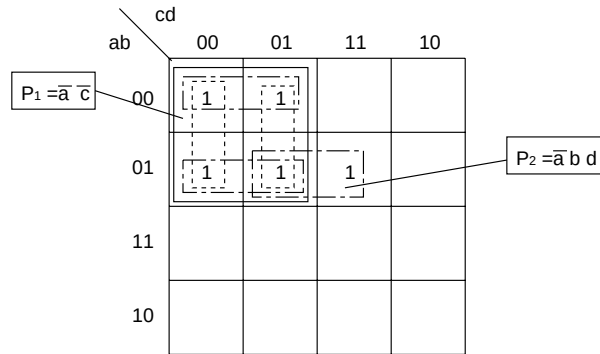
Soluzione - La mappa di Karnaugh della funzione data può essere facilmente determinata utilizzando la tavola della verità della funzione già ricavata nell'Esercizio 2.



5. Disegnare la mappa di Karnaugh per la funzione di 4 variabili $F(a,b,c,d) = \sum_4(0, 1, 4, 5, 7)$. Elencare tutti gli implicant della funzione e indicare quali sono primi e quali essenziali. Trovare, infine, una forma minima della funzione, e disegnare la rete logica equivalente.

Soluzione - Dalla mappa di Karnaugh della funzione, si ricava la lista degli implicant:

$\bar{a}\bar{b}\bar{c}$	copre le celle	0000 - 0001	$\bar{a}\bar{c}\bar{d}$	copre le celle	0000 - 0100
$\bar{a}b\bar{c}$	copre le celle	0100 - 0101	$\bar{a}\bar{c}d$	copre le celle	0001 - 0101
$\bar{a}bd$	copre le celle	0101 - 0111	$\bar{a}\bar{c}$	copre le celle	0000 - 0001 - 0100 - 0101

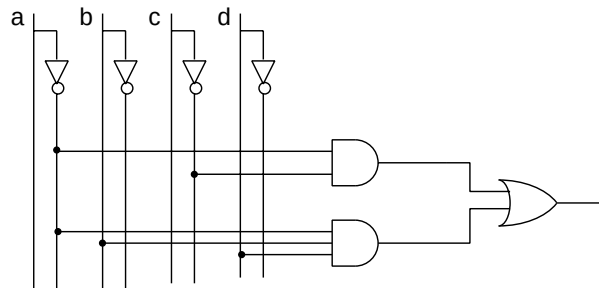


Gli implicant $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$, $\bar{a}\bar{c}\bar{d}$, $\bar{a}b\bar{c}$ e $\bar{a}\bar{c}d$ non sono primi, perchè sono contenuti nel sottorettangolo coperto dall'implicante $\bar{a}\bar{c}$.

Considerando solo gli implicant primi si vede che entrambi sono essenziali, per cui la forma minima della funzione diventa:

$$F(a, b, c, d) = \bar{a}\bar{c} + \bar{a}bd$$

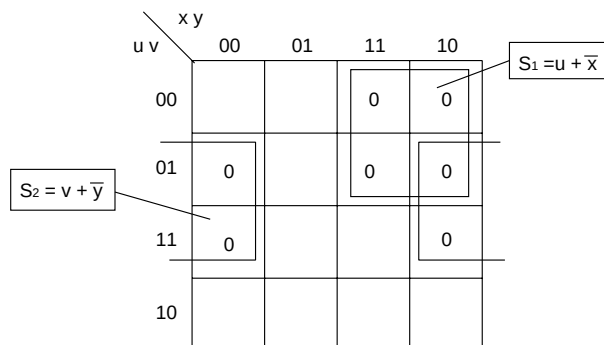
La rete logica che realizza la funzione è riportata di seguito:



6. Disegnare la mappa di Karnaugh per la funzione di 4 variabili $F(u, v, x, y) = \prod_4(2, 3, 4, 6, 7, 12, 14)$.

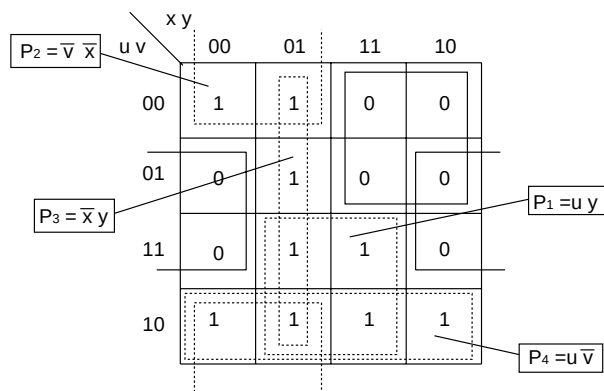
Esprimere la funzione in una forma minima PS e in una forma minima SP.

Soluzione - La mappa di Karnaugh della funzione F è data da:



Da cui si ricava la forma minima PS: $F(u, v, x, y) = (u + \bar{x})(\bar{v} + y)$.

Per ricavare una forma minima SP, si ridisegni la mappa di Karnaugh considerando le celle in cui la funzione vale 1.



Da cui si ricava la forma minima SP: $F(u, v, x, y) = uy + \bar{v}\bar{x} + \bar{x}y + u\bar{v}$.

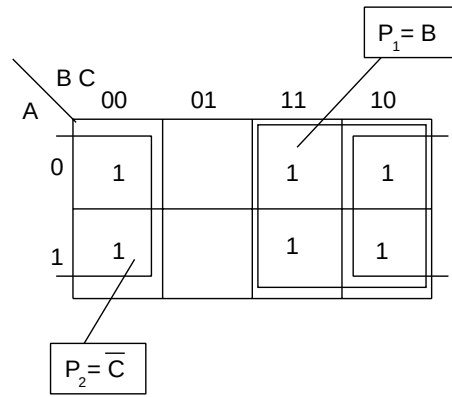
È facile vedere che le due forme sono equivalenti: infatti, partendo dalla forma minima PS e svolgendo i prodotti, si ottiene la forma minima SP.

7. Semplificare la funzione: $F = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B + AB + A\bar{B}\bar{C}$

Soluzione - Si possono seguire tre strade: *i)* - ricavare la forma canonica e da questa la mappa di Karnaugh; *ii)* - ricavare la tavola della verità e da questa la mappa di Karnaugh; *iii)* - applicando i teoremi dell'algebra booleana. Si esemplificheranno le strade *i)* e *iii)*.

$$\begin{aligned} i) - \text{ Si ricavi la forma canonica: } F &= \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B(C + \bar{C}) + AB(C + \bar{C}) + A\bar{B}\bar{C} \\ &= \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}B\bar{C} + ABC + AB\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} \end{aligned}$$

da cui è immediato ricavare la seguente mappa di Karnaugh:



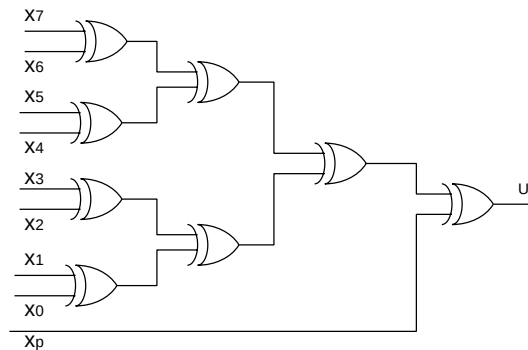
Dalla mappa di Karnaugh si ottiene: $F = B + \bar{C}$.

iii) - Per via analitica, si raccolgano fra loro il 2 e 3 termine e il 1 e il 4:

$$F = (A + \bar{A})B + (A + \bar{A})\bar{B}\bar{C} = B + \bar{B}\bar{C} = (B + \bar{B})(B + \bar{C}) = B + \bar{C}$$

8. Data una parola di 8 bit con bit di parità: $(x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, x_0, x_p)$, disegnare una rete logica a porte XOR , che verifichi se il numero di 1 della parola è pari o dispari.

Soluzione - La rete logica viene realizzata con una cascata di porte XOR , di modo che l'uscita vale $U = 1$ se il numero totale di 1 è dispari e $U = 0$ se il numero totale di 1 è pari.



9. Utilizzando il metodo tabellare di Quine-Mc Cluskey, trovare una forma minima per la seguente funzione logica: $F(A, B, C, D) = \sum_4(1, 3, 9, 11, 12, 13, 14, 15)$. Verificare il risultato con il metodo della mappa di Karnaugh.

Soluzione - Si ripercorra l'algoritmo passo a passo.

Passo 1 - Si abbia la funzione in forma canonica *SP*:

$$F(A, B, C, D) = \sum_4 (1, 3, 9, 11, 12, 13, 14, 15)$$

Passo 2 - Si dispongano i minterm della funzione in una tabella, suddivisi in classi che raggruppino i minterm della funzione che hanno lo stesso numero di variabili al valore logico 1.

<i>No. di 1</i>	<i>decimale</i>	<i>minterm</i>	<i>binario</i>	<i>marca</i>
1	1	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$	0 0 0 1	✓
2	3	$\bar{A}\bar{B}CD$	0 0 1 1	✓
2	9	$\bar{A}B\bar{C}D$	1 0 0 1	✓
2	12	$\bar{A}BC\bar{D}$	1 1 0 0	✓
3	11	$\bar{A}\bar{B}CD$	1 0 1 1	✓
3	13	$\bar{A}BCD$	1 1 0 1	✓
3	14	$\bar{A}BC\bar{D}$	1 1 1 0	✓
4	15	$ABCD$	1 1 1 1	✓

Passo 3 - Si confrontino gli ingressi della tabella di ogni classe con tutti gli ingressi della classe successiva. Quando due ingressi differiscono per un solo bit, vengono fusi in un unico ingresso, in una nuova tabella, in cui vengono riportati i bit coincidenti e indicato con "-" il bit diverso. Gli ingressi che vengono fusi sono marcati (✓) nella tabella di origine.

Passo 4 - Si costruisce una nuova tabella riportante gli ingressi generati per fusione dalla tabella precedente:

<i>decimale</i>	<i>binario</i>	<i>marca</i>
1,3	0 0 – 1	✓
1,9	– 0 0 1	✓
3,11	– 0 1 1	✓
9,11	1 0 – 1	✓
9,13	1 – 0 1	✓
12,13	1 1 0 –	✓
12,14	1 1 – 0	✓
11,15	1 – 1 1	✓
13,15	1 1 – 1	✓
14,15	1 1 1 –	✓

Passo 5 - Il procedimento ai passi 3 e 4 viene iterato. Ogni riga della nuova tabella contiene solo tre variabili, e per la riduzione si confrontano tutti gli ingressi di una classe con tutti gli ingressi della classe successiva, accorparendo gli ingressi che differiscono per un solo bit e con il trattino nella stessa posizione.

Al passo successivo si ottiene la seguente tabella:

<i>decimale</i>	<i>binario</i>	<i>marca</i>
1,3/9,11	– 0 – 1	
1,9/3,11	– 0 – 1	
9,11/13,15	1 – – 1	
9,13/11,15	1 – – 1	
12,13/14,15	1 1 – –	
12,14/13,15	1 1 – –	

Poichè l'ultima tabella non consente ulteriori riduzioni, si procede al passo successivo.

Passo 6 - I termini non spuntati nelle successive tabelle costituiscono gli implicant primari della funzione. Nel nostro caso si ottiene:

$$\begin{array}{llll}
 P_1(1, 3/9, 11) & = & - 0 - 1 & \Rightarrow & \bar{B} D \\
 P_2(9, 11/13, 15) & = & 0 1 1 - & \Rightarrow & A D \\
 P_3(12, 13/14, 15) & = & 1 1 - - & \Rightarrow & A B
 \end{array}$$

Passo 7 - Dalla lista degli implicant primi bisogna individuare una forma irridondante minima. A tale scopo viene costruita la seguente *tabella di copertura*.

<i>Implicant primi</i>	1	3	9	11	12	13	14	15
$P_1(1, 3/9, 11)$	×	×	×	×				
$P_2(9, 11/13, 15)$			×	×		×		×
$P_3(12, 13/14, 15)$					×	×	×	×

Passo 8 - Dalla tabella si vede che P_2 è inessenziale in quanto coperto $P_1 + P_3$. Si vede, quindi, che per coprire tutte le colonne con il minimo numero di termini deve essere:

$$F = P_1 + P_3 = \bar{B} D + A B$$

Si verifica il precedente risultato, ottenuto tramite la minimizzazione tabellare, mediante la mappa di Karnaugh. A tal fine, si ricavi la mappa di Karnaugh della funzione di partenza $F(A, B, C, D) = \sum_4(1, 3, 9, 11, 12, 13, 14, 15)$.

		CD			
AB		00	01	11	10
	00		1	1	
	01				
	11	1	1	1	1
	10		1	1	

$P_1 = \bar{B} D$

$P_3 = A B$

Dall'esame degli implicant relativi ai sottorettangoli minimi si ottiene:

$$F(A, B, C, D) = \bar{B} D + A B$$