Geometria (Informatica) — 17 Giugno 1999

Chi vuole recuperare il primo compitino svolge solo gli esercizi 1,5,6.
Chi vuole recuperare il secondo compitino svolge solo gli esercizi 2,3,4.
Chi fa lo scritto "normale" deve svolgere gli esercizi 1,2,4,6.

I punti ottenuti verranno espressi per tutti in trentesimi.

1. Fissata in $\mathbb{C}^3$ la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ si consideri l'applicazione lineare definita da:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= e_1 - ie_2 + e_3 \\ f(e_2) &= ie_1 + e_2 + e_3 \\ f(e_3) &= ie_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}$$

   Si trovino:

   (a) Una base per il nucleo e una base per l'immagine **(3 punti).**

   (b) Trovare $f^{-1}(v)$ e $f^{-1}(w)$ dove $v = -e_2$ e $w = e_1 - ie_2 + e_3$. **(4 punti)**

2. Fissata in $\mathbb{R}^3$ la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ si consideri l'applicazione lineare definita da:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= e_2 + e_3 \\ f(e_2) &= e_1 + ke_3 \\ f(e_3) &= e_1 - e_2 \end{aligned}$$

   (a) Si studi la diagonalizzabilità della matrice associata al variare di k in $\mathbb{R}$. **(5 punti)**

   (b) Per che valori di k la matrice è invertibile? **(2 punti)**

   (c) Per che valori di k il vettore $v = e_1 - e_2 + e_3$ è un autovettore ? **(3 punti)**

3. Sia A una matrice quadrata $n \times n$ tale che $A^n = 0$. Si dimostri che se A è diagonalizzabile allora $A = 0$. **(5 punti)**

4. Data $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ si mostri che è diagonalizzabile e si trovi una sua forma diagonale.**(6 punti)**

5. Discutere, al variare del parametro reale k , la risolubilità e il numero di soluzioni del sistema lineare: **(6 punti).**

$$\left\{ \begin{array}{c} x + 2y + 2z + t = k \\ x - 2y - 2z + t = 0 \\ x + t = 0 \\ y + z + (k-1)t = 0 \end{array} \right\}$$

6. Fissata in $\mathbb{R}^3$ la base canonica si considerino i seguenti vettori:

$$v = (1, 1, 1) \quad w = (-1, 0, 1) \quad u = (0, 1, 2)$$

ed i seguenti sottospazi: $U = span\,\{v, u\}$ e $V = span\,\{v, w, u\}$.

a. Calcolare le dimensioni di $U \cap V$ e di $U + V$. **(4 punti).**

b. Scrivere l'equazione della retta passante per u e ortogonale al piano che contiene v e w. **(4 punti).**