SOLUZIONI 6 LUGLIO 1999

Esercizio 1

La matrice è:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i & 1 \\ i & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

base immagine: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,base del nucleo: $\emptyset$

autovettori e corrispondenti autovalori:: $\left\{ \begin{pmatrix} -i\left(1+\sqrt{3}\right)+2i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow$ $1+\sqrt{3}$, $\left\{ \begin{pmatrix} -i\left(1-\sqrt{3}\right)+2i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 1-\sqrt{3}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 2$, polinomio caratteristico: $-X^3+4X^2-2X-4 = -\left(X-2\right)\left(X^2-2X-2\right)$

Sistema lineare $A^2(v) = 4v$:questa **è l'equazioni agli autovalori di** A^2 , nel caso di autovalore 4 (che è proprio il quadrato dell'autovalore 2 di A). Ne segue, **senza conti**, che **il sistema è risolubile**, e **lo spazio delle soluzioni** (che è l'autospazio dell'autovalore 4) **ha dimensione uno** (infatti tutti gli autovalori di A e di A^2 **sono distinti e quindi gli autospazi hanno dimensione uno**).

Sistema lineare $A^2(v) = 8v$:questa **è l'equazioni agli autovalori di** A^2, ma 8 **non è autovalore** (perchè **non** è il quadrato di un autovalore di A) per cui **il sistema ha come unica soluzione la soluzione nulla.**

Esercizio n.2

L'intersezione si ottiene dal sistema:

$$\left\{ \begin{array}{c} x+y+z=0 \\ x-y=0 \end{array} \right\}$$

le soluzioni sono i vettori del tipo $v = \begin{pmatrix} x \\ x \\ -2x \end{pmatrix}$ per cui **l'equazione parametrica** è $r = t(1,1,-2)$.

Per trovare U si devono trovare due vettori indipendenti e ortogonali a v.

Per esempio $u = (1,-1,0)$ e $w = (0,2,1)$. U è allora $span\,\{u,w\}$

La matrice della applicazione lineare deve avere **due colonne uguali ai vettori** u e w (così siamo certi che ha come immagine il loro *span* cioè proprio U). **L'altra colonna** si determina imponendo che la matrice applicata a v dia 0 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -1 & 2 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

: cioè $\begin{pmatrix} 1-2a \\ 1-2b \\ 1-2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ per cui: $a = 1/2$, $b = 1/2$, $c = 1/2$.

La matrice richiesta è, allora: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ -1 & 2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$

Esercizio n.3

Sia $Av = \lambda v$; siccome $A^2 = -A$ si ha: $A^2 v = \lambda^2 v$ e $A^2 v = -Av = -\lambda v$. Ne segue che $\lambda^2 + \lambda = 0$ (notare che v è un autovettore e quindi non è nullo). Quindi i possibili autovalori possono essere solo 0 e -1.

A **è diagonalizzabile,** perchè se k è la dimensione del nucleo, $h = n - k$ deve essere la dimensione dell'immagine (per il teorema delle dimensioni). Inoltre, il nucleo è l'autospazio dell'autovalore $\lambda = 0$ (V_0), mentre l'immagine è l'autospazio dell'autovalore $\lambda = -1$. (Basta notare che, se $v \in \mathrm{Im}(A)$, $v = Aw$ cioè $Av = A^2 w = -Aw = -v$ e **quindi** $v \in V_{-1}$, **viceversa**, se $v \in V_{-1}$, $Av = -v$ cioè $v = -Av = A(-v)$ e quindi v si scrive come Aw con $w = -v$.

Il teorema delle dimensioni ci dice allora che:

$$R^n = KerA \oplus \mathrm{Im}(A) = V_0 \oplus V_{-1}$$

che è proprio la condizione di diagonalizzabilità. (Naturalmente questa formula comprende anche i casi estremi in cui $A = 0$ oppure $A = -I$).