Soluzioni dello scritto del 12 gennaio 2000

Esercizio n.1

Basta scrivere due vettori indipendenti e ortogonali a $(1, 2, 1)$, ad esempio $(1, 0, -1)$ e $(1, -1, 1)$. Le equazioni parametriche del piano sono allora $(x, y, z) = t(1, 0, -1) + s(1, -1, 1)$ e quella cartesiana è $x + 2y + z = 0$.

Esercizio n.2

Basta scrivere una matrice 3×3 con due colonne costituite dai vettori che generano il piano e determinare la terza colonna dalla condizione $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & b \\ -1 & 1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+a \\ -2+b \\ 1+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; si ottiene $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Esercizio n.3

(a) La matrice della applicazione lineare è $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, con polinomio caratteristico: $-X^3+X^2+2X$. Una base dell'immagine è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ e una base del nucleo è : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ .Gli autovalori sono: $0, -1, 2$ e gli autovettori: $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow -1$, $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 2$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 0$.

(b) Il sistema proposto è l equazione per gli autovettori dell autovalore 1 della matrice A^{100} (i cui autovalori sono, ovviamente, 0^{100}, $(-1)^{100} = 1$ e 2^{100}). Siccome l autovalore 1 esiste e tutti gli autovalori sono distinti è chiaro che tutti gli autospazi sono di dimensione uno, per cui il sistema ha ∞^1 soluzioni.

Esercizio n.4

La matrice dei coefficienti è $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; la matrice completata è $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & 1 & k \\ 1 & 1 & 0 & k \end{pmatrix}$.

Si ha $\det A = -1 + k$ per cui $rango(A) = 2$ per $k = 1$ e $rango(A) = 3$ negli altri casi.

Mentre $rango(B) = 3$ per ogni valore di k. Allora il sistema per $k = 1$ non ha soluzioni, mentre negli altri casi ha una unica soluzione.

Esercizio n.5

Si nota subito che $v_3 = v_1 + v_2$, $v_6 = 2v_1$e che v_2, v_4, v_1 sono indipendenti.

Quindi $U = Span\,\{v_1, v_2\}$ e $V = Span\,\{v_3, v_4, v_5, v_6\} = Span\{v_2, v_4, v_1\}$ perchè v_5 è una combinazione lineare dei tre vettori indipendenti v_2, v_4, v_1. Ne segue immediatamente che:

(a) la dimensione di $U \cap V$ è due e una base è v_1, v_2.

(b) la dimensione di $U + V$ è tre e una base è v_2, v_4, v_1.

(c) basta scrivere un vettore ortogonale a v_2 e v_1, ad esempio $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio n.6

(a) Il determinante è $2k^2 - 1$ per cui la matrice è invertibile per $k \neq \pm\sqrt{1/2}$

(b) il polinomio caratteristico è $-X^2 + 2Xk - 2k^2 + 1$; gli autovalori: $k+\sqrt{(-k^2+1)}, k-\sqrt{(-k^2+1)}$ sono **r e a l i** e distinti se **- 1 < k < 1** . Gli autovettori sono: $\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{(-k^2+1)}}{-1+k} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow k+\sqrt{(-k^2+1)}$, $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{(-k^2+1)}}{-1+k} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow k - \sqrt{(-k^2+1)}$ e la matrice è diagonalizzabile perchè c è una base di autovettori.

Nei due casi particolari $k = \pm 1$ si vede subito che gli autovalori non sono regolari perchè la dimensione dell autospazio corrispondente è uno; la matrice non è diagonalizzabile. Infatti risulta$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con autovettore$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 1$ e $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ con autovettore $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow -1$

(c) gli autovettori sono ortogonali quando ce ne sono almeno due indipendenti e **r e a l i** , inoltre, deve essere:

$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{(-k^2+1)}}{-1+k} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{(-k^2+1)}}{-1+k} \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{-k^2+1}{(-1+k)^2} + 1 = 0$, la cui unica soluzione accettabile è $k = 0$.