Geometria (Informatica) — 6 Luglio 1999

1. Fissata in $\mathbb{C}^3$ la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ si consideri l'applicazione lineare definita da:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= +ie_2 + e_3 \\ f(e_2) &= -ie_1 + 2e_2 \\ f(e_3) &= e_1 + 2e_3 \end{aligned}$$

   (a) Trovare una base per il nucleo e una base per l'immagine **(3 punti).**

   (b) Trovare autovalori e autovettori **(5 punti)**

   (c) Quante soluzioni ha il sistema lineare $A^2(v) = 4v$ (dove A è la matrice associata a f e $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$)? **(3 punti)**

   (d) Quante soluzioni ha il sistema lineare $A^2(v) = 8v$? **(3 punti)**

2. Si considerino, in $\mathbb{R}^3$, i piani W e V di equazioni $x + y + z = 0$ e $x - y = 0$.

   (a) Trovare l'equazione parametrica della retta $r = V \cap W$ **(3 punti)**

   (b) Scrivere una applicazione lineare di nucleo r e immagine U (dove U è il piano ortogonale a r e passante per l'origine delle coordinate. **(5 punti)**

3. Quali possono essere i possibili autovalori di una matrice A tale che $A^2 = -A$?(**3 punti**)

   (a) Si mostri che una tale matrice è sempre diagonalizzabile (**5 punti**)