Soluzioni dello scritto del 15 Giugno 2000

Esercizio 1.

(a) La retta intersezione di $x + y + z = 0$ e $2x - y = 0$ è data da $y = 2x$ e $z = -3x$. La cui equazione parametrica è: $l = t(1, 2, -3)$; mentre l'equazione parametrica di W si può ottenere facilmente da quella cartesiana ponendo: $x = t, y = s, z = -t - s$. Si ottiene: $W = t(1, 0, -1) + s(0, 1, -1)$.

(b) La matrice cercata deve avere rango 1, perchè il suo nucleo deve avere, per ipotesi, dimensione due.

Una sua colonna è il vettore dato (cosi̇̀ siamo certi che l'immagine contenga lo spazio da lui generato, cioè la retta data l). Allora possiamo cercare una matrice della forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & d \\ 2 & b & e \\ -3 & c & f \end{pmatrix}$$

Dove le colonne incognite sono determinate dalle due condizioni:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & d \\ 2 & b & e \\ -3 & c & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-d \\ 2-e \\ -3-f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & d \\ 2 & b & e \\ -3 & c & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-d \\ b-e \\ c-f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

:

Si ottiene: $a = d = 1, b = e = 2, c = f = -3$. Da cui la matrice cercata è: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

(c) Per trovare un piano π ortogonale a l e passante per l'origine basta trovare due vettori indipendenti e ortogonali a l; ad esempio $v = (1, 1, 1)$ e $u = (1, -1/2, 0)$. Allora $\pi = tv + sw$.

Esercizio 2.

(a) La matrice associata è:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

con **determinante** $= -1$. Quindi la matrice è invertibile e quindi il sistema lineare $f(v) = e_1 + e_2$ ha una sola soluzione; questa si può trovare facilmente imponendo:

$$f(v) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y+z \\ -y+z \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 + e_2$$

Si ottiene: $v = (-2, -1, 0) = -2e_1 - e_2$.

(b) La matrice è triangolare e quindi ha come autovalore -1 con molteplicità algebrica 3. La sua molteplicità geometrica è però 1, infatti da

$$f(v) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y+z \\ -y+z \\ -z \end{pmatrix} = -v = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

Si ottiene che l'autospazio è unidimensionale e ha come base il vettore e_1. La matrice **non è diagonalizzabile.**

(c) Il sistema lineare omogeneo $A^{10}(v) = v$ è l'equazione per l'autovalore 1 della matrice A^{10}.Tale matrice ha come autovalori $(-1)^{10} = 1$ e come autospazi gli stessi di A. Ne segue immediatamente che il sistema ha ∞^1 soluzioni.

Esercizio 3.

(a) I possibili autovalori sono ottenuti dall'equazione $p(\lambda) = \lambda^3 + k^2\lambda = 0$. Raccogliendo λ si ottiene: $\lambda(\lambda^2 + k^2) = 0$; da cui $\lambda = 0, ki, -ki$.

(b) La matrice è **certamente diagonalizzabile** se gli autovalori sono tutti **distinti** (*ovviamente potrebbe essere diagonalizzabile anche se non fosse così, ma, non sapendo altre cose sulla matrice, non possiamo dire, con certezza, nulla*) **cioè** $k \neq 0$.

(c) Se $k = 0$ la matrice verifica $A^3 = 0$. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile, mentre $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ non è diagonalizzabile perchè ha rango 1 e quindi la dimensione del nucleo è 2 e quindi la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = 0$ è 2 mentre quella algebrica è 3.