Soluzioni dello scritto del 21 febbraio 2000

Esercizio 1.

La matrice dei coefficienti è:

$$\begin{pmatrix} 1-t & 2 & -t \\ 1 & -t & 2 \end{pmatrix}$$

che ha rango al **massimo** uguale a **due**. I problemi di risolubilità del sistema possono sorgere solo quando questa matrice ha rango uguale a **uno**. I suoi minori di ordine due sono:

$$\begin{pmatrix} 1-t & 2 \\ 1 & -t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 2 & -t \\ -t & 2 \end{pmatrix}$$

Tutti questi minori hanno determinante **nullo** quando $t = 2$. **Solo** in questo caso, quindi, la matrice dei coefficienti ha rango 1. La matrice completata è :

$$\begin{pmatrix} 1-t & 2 & -t & t \\ 1 & -t & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha rango uguale a **due anche nel caso** $t = 2$ (infatti, ad esempio, il minore $\begin{pmatrix} -t & t \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ha determinante uguale a $-3t$).

Ricapitolando, per $t = 2$ il sistema non è risolubile, mentre per $t \neq 2$ il sistema è risolubile e ha $\infty^{incognite-rango} = \infty^{3-2} = \infty^{1}$ soluzioni.

Esercizio 2.

La matrice associata è:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con **determinante** $= 8$. Quindi la matrice è invertibile e quindi il **nucleo è il solo vettore nullo**. L'immagine è generata dalle colonne indipendenti della matrice ; essendoci tre colonne indipendenti, **l'immagine è tutto $\mathbb{C}^3$**.

Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^3 - 8$. Le soluzioni **complesse** sono **tre distinte** (le tre radici terze di otto)**:** la matrice **è diagonalizzabile.**

Esercizio 3.

I possibili autovalori sono ottenuti dall'equazione $p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 4k^2\lambda + 4k^2 = 0$. Raccogliendo λ^2 e $4k^2$ si ottiene: $(\lambda - 1)(\lambda^2 - 4k^2) = 0$; da cui $\lambda = 1, 2k, -2k$. La matrice è **certamente diagonalizzabile** se gli autovalori sono tutti **distinti** (*ovviamente potrebbe essere diagonalizzabile anche se non fosse così, ma, non sapendo altre cose sulla matrice, non possiamo dire, con certezza, nulla*) cioè se $k \neq 0, 1/2, -1/2$.

Se **inoltre** sappiamo che la matrice ha **rango uno**, vuole dire che la **dimensione del nucleo è due**. Se $k = 0$, abbiamo che $\lambda = 0$ ha **molteplicità algebrica due**, perchè appare due volte come soluzione, e **molteplicità geometrica pure due.** Allora la matrice, se ha **rango** uguale a **uno**, è **certamente** diagonalizzabile se $k = 0$. (Notare che la condizione è anche **necessaria**).

Esercizio 4.

Basta trovare due vettori **indipendenti e ortogonali** al vettore $(1, -1, 1)$ ad **esempio** $(1, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$.

Il piano è allora: $\pi = t(1, 1, 0) + s(0, 1, 1)$. Eliminando t e s si ottiene: $x - y + z = 0$.

Esercizio 5.

La matrice cercata deve avere rango 1, perchè il suo nucleo deve avere, per ipotesi, dimensione due.

Una sua colonna è il vettore dato (così siamo certi che l'immagine contenga lo spazio da lui generato, cioè la retta data). Allora possiamo cercare una matrice della forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & d \\ -1 & b & e \\ 1 & c & f \end{pmatrix}$$

Dove le colonne incognite sono determinate dalle due condizioni:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & d \\ -1 & b & e \\ 1 & c & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a \\ -1+b \\ 1+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & d \\ -1 & b & e \\ 1 & c & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d \\ b+e \\ c+f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si ottiene: $a = -d = -1, b = -e = 1, c = -f = -1$. Da cui la matrice cercata è: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$