Soluzioni dello scritto del 24 ottobre 2000

Esercizio 1.

La matrice dei coefficienti è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 \\ k & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha determinante $-1+k$. I problemi di risolubilità del sistema possono sorgere solo quando questa matrice ha rango uguale a **due**. Questo accade se $k = +1$. La matrice completata è :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & k \\ k & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango uguale a **due** per $k = 1$. (Basta contare le colonne indipendenti).

Ricapitolando, per $k = 1$ il sistema ha $\infty^{incognite-rango} = \infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni, mentre per $k \neq 1$ il sistema ha $\infty^{incognite-rango} = \infty^{3-3} = \infty^0$ soluzioni.

Esercizio 2.

Sia v un autovettore di A con autovalore λ. $A^3v + A^2v = Av$, da cui $(\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda)v = 0$. Gli autovettori devono essere non nulli, per cui gli unici λ possibili sono: $\{\lambda = 0\}$ $\{\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\}$ $\{\lambda = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\}$

Esercizio 3.

La matrice è a blocchi per cui si studiano i due blocchi separatamente. Il primo blocco è **triangolare superiore con autovalori 1 e 6**. Il secondo blocco è $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ ed ha **rango uguale a 1**, quindi la dimensione del nucleo è **2** e **zero è un autovalore di molteplicità geometrica 2.** Un altro autovalore si trova subito:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per cui **6 è un altro autovalore**.

L'autovalore 1 ha molteplicità algebrica e geometrica uguale a 1. Per quanto riguarda l'autovalore 6, questo ha molteplicità algebrica uguale a 2 si deve quindi trovare la sua molteplicità geometrica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 6y \\ 2z+2u+2v \\ 2z+2u+2v \\ 2z+2u+2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x \\ 6y \\ 6z \\ 6u \\ 6v \end{pmatrix}$$

da cui una base per l'autospazio dell'autovalore 6 è:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e quindi è regolare. L'autovalore 0 ha molteplicità geometrica uguale a 2 come detto sopra e algebrica pure 2, perchè la matrice è di dimensione 5 (e quindi la somma delle molteplicità algebriche deve fare 5) per cui $5 - 2 - 1 = 2$. **Tutti gli autovalori sono regolari e quindi la matrice è diagonalizzabile**.

Esercizio 4.

Il **nucleo** è costituito dai polinomi di grado zero (le costanti) mentre **l'immagine** è lo spazio dei polinomi di grado almeno uno e al più 3. Questo spazio è generato da $\{x, x^2, x^3\}$ ed è di dimensione tre..

Nelle basi assegnate l'applicazione è data da:

$$\begin{aligned} f(1) &= 0 \\ f(x) &= x \\ f(x^2) &= 2x^2 \\ f(x^3) &= 3x^3 \end{aligned}$$

Per cui la matrice è:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Si vede subito che, in accordo col punto a), il rango è 3.