Soluzioni dello scritto del 28 marzo 2000

Esercizio 1.

La matrice dei coefficienti è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k \\ k^2 & 1 & k^2 \end{pmatrix}$$

che ha determinante $-k+1+k^3-k^2$. I problemi di risolubilità del sistema possono sorgere solo quando questa matrice ha rango uguale a **uno oppure due**. Questo accade, rispettivamente, se $k=+1$ o -1. La matrice completata è :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 0 \\ k^2 & 1 & k^2 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango uguale a **due** per $k=1$ e uguale a **tre** per $k=-1$.(Basta contare le colonne indipendenti).

Ricapitolando, per $k=\pm 1$ il sistema non è risolubile, mentre per $k \neq \pm 1$ il sistema è risolubile e ha $\infty^{incognite-rango} = \infty^{3-3} = \infty^0$ soluzioni.

Esercizio 2.

La matrice associata è:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

con **determinante** $=-1$. Quindi la matrice è invertibile e quindi il nucleo è il solo vettore nullo. L'immagine è generata dalle colonne indipendenti della matrice ; essendoci tre colonne indipendenti, **l'immagine è tutto** $\mathbb{C}^3$. Il sistema $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ha quindi una soluzione unica: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Allora: $f^{-1}(e_1+e_2) = \frac{1}{2}e_1 + 2e_2 - e_3$.

Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = -\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1$. Gli autovalori **distinti** sono ± 1 e gli autovettori **indipendenti** sono solo due: $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow -1$, $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 1$: la matrice **non è diagonalizzabile.**

Esercizio 3.

I possibili autovalori sono ottenuti dall'equazione $p(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 2k\lambda - 2k = 0$. Raccogliendo λ^2 e $2k$ si ottiene: $(-\lambda + 1)(\lambda^2 - 2k) = 0$; da cui $\lambda = 1, \sqrt{2k}, -\sqrt{2k}$. La matrice è **certamente diagonalizzabile** se gli autovalori sono tutti **distinti** (*ovviamente potrebbe essere diagonalizzabile anche se non fosse così, ma, non sapendo altre cose sulla matrice, non possiamo dire, con certezza, nulla*) cioè se $k \neq 0, 1/2$.

Se $k = 0$, abbiamo che $\lambda = 0$ ha **molteplicità algebrica due**, perchè appare due volte come soluzione. Allora la matrice, se ha **rango** uguale a **uno**, è **certamente** diagonalizzabile (perchè in questo caso la dimensione del nucleo è anch'essa uguale a due). Mentre se ha **rango** uguale a **due**, **non lo è** (perchè in questo caso la dimensione del nucleo è uguale a uno). Esempio: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **è diagonalizzabile**, mentre $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **non è diagonalizzabile** e hanno lo stesso polinomio caratteristico $p(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2$.

Esercizio 4.

Basta trovare due vettori **indipendenti e ortogonali** al vettore $(-1, 1, 1)$ ad **esempio** $(1, 1, 0)$ e $(0, -1, 1)$.

Il piano è allora: $\pi = t(1, 1, 0) + s(0, -1, 1)$. Eliminando t e s si ottiene: $x - y - z = 0$.

Esercizio 5.

La matrice cercata deve avere rango 2, perchè il suo nucleo deve avere, per ipotesi, dimensione uno.

Due sue colonne sono i vettori che generano il piano (così siamo certi che l'immagine contenga lo spazio da loro generato, cioè il piano). Allora possiamo cercare una matrice della forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & -1 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$$

Dove la colonna incognita è determinata dalla condizione:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & -1 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+a \\ -2+b \\ 1+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si ottiene: $a = 1, b = 2, c = -1$. Per cui la matrice cercata è: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.