Geometria (Informatica) — 9 gennaio 2001

Ricordo le "regole del gioco": sotto i 16.5 punti si deve ripetere lo scritto, tra 16.5 e 18 si ***deve*** *fare l'orale, sopra i 18 si* ***può*** *fare l'orale.*

1. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ il piano π di equazione $x - y + z = 0$ e il punto $a = (1, 1, 1)$.

a) scrivere l'equazione della retta passante per a e ortogonale a π. **Punti 3**
b) scrivere la matrice di una applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in sè che abbia come nucleo una retta parallela alla retta trovata prima e passante per l'origine e come immagine il piano π . **Punti 3**

2. Data la matrice **complessa** $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$

a) si trovino gli autovalori. **Punti 5**
b) è diagonalizzabile ? **Punti 4**
c) si scriva una matrice B tale che $D = B^{-1}AB$ sia diagonale. **Punti 5**

3. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 3 con base $\{1, x, x^2, x^3\}$ e W lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 4 con base $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$. Cioè:

$$V \equiv \{v = a + bx + cx^2 + dx^3 \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$
$$W \equiv \{w = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \text{ con } a, b, c, d, e \in \mathbb{R}\}$$

e si consideri l'applicazione lineare f da V a W definita dalla seguente espressione:

$$f(v) = x^2 \frac{dv}{dx}$$

a) Trovare nucleo e immagine di f. **Punti 4**
b) Trovare, *nella base indicata*, la matrice della applicazione f. **Punti 4**
c) Trovare il rango di f. **Punti 2**