Geometria (Informatica) — 24 ottobre 2000

Ricordo le "regole del gioco": sotto i 16.5 punti si deve ripetere lo scritto, tra 16.5 e 18 si ***deve*** *fare l'orale, sopra i 18 si* ***può*** *fare l'orale.*

1. Si consideri il sistema lineare dato dalle equazioni $x + y + z = 1$, $kx + y + z = k$, $kx + y = 0$ con k parametro reale.

   (a) Trovare un valore di k per cui il sistema ha una sola soluzione. **Punti 3**

   (b) Trovare un valore di k per cui il sistema ha infinite soluzioni. **Punti 3**

2. Si trovino gli autovalori di una matrice A tale che $A^3 + A^2 = A$. **Punti 2**

3. Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

a) si trovino gli autovalori. **Punti 6**
b) si mostri che è diagonalizzabile. **Punti 6**

4. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 3 con base $\{1, x, x^2, x^3\}$ Cioè:

$$V \equiv \left\{ v = a + bx + cx^2 + dx^3 \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

e si consideri l'applicazione lineare f da V a V definita dalla seguente espressione:

$$f(v) = x\frac{dv}{dx}$$

a) Trovare nucleo e immagine di f. **Punti 4**
b) Trovare, *nella base indicata*, la matrice della applicazione f. **Punti 4**
c) Trovare il rango di f. **Punti 2**