Soluzioni dello scritto del 6 Luglio 2000

Esercizio 1.

(a) $v = (1,1,1)$ $\quad w = (-1,0,1)$ $\quad u = (1,2,3)$ dove: $U = span\{v,w\}$, $V = span\{v,w,u\}$. Ma $U = V$ perchè $u = 2v + w$. E, inoltre, $\dim U = 2$ perchè v e w sono **indipendenti.** Allora $U \cap V = U$ e $U + V = U$ e quindi tutti e due **hanno dimensione** 2.

(Si noti che, infatti, $\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) = 2 + 2 - 2 = 2$).

(b) Per trovare la retta basta trovare un vettore **ortogonale** a v e u, per esempio $(1,-2,1)$. La **retta** è, allora, $r = (x,y,z) = t(1,-2,1)$ con t parametro reale.

(c) Il vettore $z = (0,1,k)$ appartiene a U se si può scrivere $z = av + bw$ cioè se $(0,1,k) = (a,a,a) + (-b,0,b) = (a-b,a,a+b)$ cioè $a - b = 0$, $a = 1$, $a + b = k$ e quindi $k = 2$.

(d) Il vettore $z = (0,1,k)$ è ortogonale a U se: $1 + k = 0$ e $k = 0$: questo sistema **non ammette soluzioni**.

Esercizio 2.

La matrice associata è:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & k & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Gli autovalori sono: $-1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(5+4k)}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(5+4k)}$.

Se le soluzioni sono **reali e distinte** (cioè $k > -5/4$ e $k \neq 1$) la matrice **è diagonalizzabile.**

Un caso da discutere è: $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(5+4k)} = -1 \Longrightarrow \{k = 1\}$ ma la matrice è **simmetrica** e quindi **diagonalizzabile.**

Un altro caso da discutere è quando il **discriminante** è nullo, cioè $k = -5/4$. Allora la matrice diventa
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -5/4 & 0 \end{pmatrix}$ con autovettori $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow \frac{1}{2}, \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow -1$, e autovalori: $-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

La matrice **non è diagonalizzabile** perchè $1/2$ **non è regolare** (la molteplicità algebrica è 2 e quella geometrica 1).

(b) Il determinante è $k+1$ che è diverso da zero per $k \neq -1$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1+k \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ se $k = 1$.

(d) La matrice del sistema ha rango 3 per $k \neq -1$ e quindi il sistema dato ha **una sola soluzione**.

Per $k = -1$ la matrice del sistema ha rango 2 e la matrice completa ha rango 3; il sistema **non ammette soluzione**.

(e) Se il rango minimo è 2 vuole dire che la dimensione massima del nucleo è 1 , questa dimensione si ottiene per $k = -1$. Le equazioni del nucleo sono $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+z \\ x+z \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ da cui una base è $\begin{pmatrix} x \\ x \\ -x \end{pmatrix}$.