Geometria (Informatica) — 6 Luglio 2000

Ricordo le "regole del gioco": sotto i 16.5 punti si deve ripetere lo scritto, tra 16.5 e 18 si ***deve*** *fare l'orale, sopra i 18 si* ***può*** *fare l'orale.*

1. Fissata in $\mathbb{R}^3$ la base canonica si considerino i seguenti vettori:

$$v = (1,1,1) \quad w = (-1,0,1) \quad u = (1,2,3)$$

ed i seguenti sottospazi: $U = span\{v, w\}$ e $V = span\{v, w, u\}$. Si ricordi che $span\{...\}$ è il sottospazio generato dai vettori contenuti nella parentesi.

(a) Calcolare le dimensioni di $U \cap V$ e di $U + V$. **(4 punti).**

(b) Scrivere l'equazione della retta passante per l'origine e ortogonale al piano che contiene v e u. **(3 punti).**

(c) Per che valori di k il vettore $z = (0, 1, k)$ appartiene a U ? **(3 punti).**

(d) Per che valori di k il vettore $z = (0, 1, k)$ è ortogonale a U ? **(3 punti).**

2. Fissata in $\mathbb{R}^3$ la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ si consideri l'applicazione lineare **reale** definita da:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= e_2 + e_3 \\ f(e_2) &= e_1 + ke_3 \\ f(e_3) &= e_1 + e_2 \end{aligned}$$

(a) Si studi la diagonalizzabilità della matrice al variare di k in $\mathbb{R}$. **(5 punti)**

(b) Per che valori di k la matrice è invertibile? **(3 punti)**

(c) Per che valori di k il vettore $v = -e_1 + e_2$ è un autovettore con autovalore -1 ? **(3 punti)**

(d) Studiare, al variare di k, la risolubilità e il numero di soluzioni del sistema lineare $Au = b$, dove A è la matrice associata a f , $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. **(3 punti)**

(e) Trovare i valori di k per cui la dimensione del nucleo di f è la più grande possibile e, in questo caso, trovarne una base. **(3 punti)**