Soluzioni dello scritto del 9 gennaio 2001

Esercizio 1.

Il piano π ha equazioni parametriche $\pi = t(1,1,0) + s(0,1,1)$ per cui basta trovare un vettore v ortogonale alle due direzioni che generano il piano, ad esempio $v = (1,-1,1)$. La retta cercata ha equazioni parametriche $r = (1,1,1) + t(1,-1,1)$.

La matrice cercata è del tipo $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$ dove $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a \\ b \\ -1+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ da cui: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Esercizio 2.

Gli autovalori e i relativi autovettori sono:

$$\left\{ \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i, \left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 1$$

essendo gli autovalori **tutti distinti** la matrice è diagonalizzabile; prendendo la matrice che ha come colonne gli autovettori si ottiene:

$$D = \begin{pmatrix} i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3.

Il **nucleo** è costituito dai polinomi di grado zero (le costanti) e **ha dimensione uno**; **l'immagine** è lo spazio dei polinomi di grado diverso da uno e al più quattro. Questo spazio è generato da $\{x^2, x^3, x^4\}$ ed è **di dimensione tre.**

Nelle basi assegnate l'applicazione è data da:

$$\begin{aligned} f(1) &= 0 \\ f(x) &= x^2 \\ f(x^2) &= 2x^3 \\ f(x^3) &= 3x^4 \end{aligned}$$

Per cui la matrice è:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Si vede subito che, in accordo col punto a), il rango è 3.