Geometria 1A (fisica,matematica e informatica)

3 luglio 2001

Con meno di 16.5 punti si deve ripetere lo scritto, tra 16.5 e 18 si **deve** *fare l'orale, sopra i 18 si* **può** *fare l'orale.*
Matematici e Fisici devono svolgere anche l'esercizio n. 4 e il punteggio sarà riportato arrotondato a 30/30.

1. Si considerino in $\mathbb{R}^3$ il piano W di equazioni parametriche $W = t(1,1,-1) + s(1,0,1)$ e la retta (*variabile perchè dipende dal numero reale* k) $r(k) = (1,0,0) + u(1,k,0)$.

   (a) Trovare i valori di k per cui il piano e la retta **non** si intersecano. **(4 punti)**

   (b) Trovare il punto di intersezione tra il piano W e la retta $r(1)$. **(3 punti)**

2. Sia A una matrice **complessa** 4×4 con polinomio caratteristico $p(z) = (z^4 + 1)$.

   (a) Quali sono gli autovalori di A ? **(3 punti)**

   (b) E' diagonalizzabile ? **(3 punti)**

   (c) Quali sono gli autovalori di A^2 ? **(3 punti)**

   (d) Quale è il polinomio caratteristico di A^2 ? **(4 punti)**

   (e) Trovare una matrice **non diagonalizzabile** con lo stesso polinomio caratteristico di A^2 (**4 punti**)

3. In $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ e i sottospazi $U = span\,\{v, u\}$ e $V = span\,\{w, z, u\}$

   (a) Trovare la dimensione e una base del sottospazio $U \cap V$. (**3 punti**)

   (b) Trovare la dimensione e una base del sottospazio $U + V$. (**3 punti**)

5. Sia $V = \mathbb{R}^3$. Posto

$$\phi\,(u, v) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3$$

dove $u = (x_1, x_2, x_3)$ e $v = (y_1, y_2, y_3)$

(a) Verificare che ϕ induce un prodotto scalare. (**2 punti**)

(b) Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $u_1 = (1,1,0)$ e $u_2 = (1,0,1)$. Determinare le equazioni di U e quelle del complemento ortogonale $U^\perp$.(**3 punti**)