Soluzioni dello scritto del 3 Aprile 2001

Esercizio 1.

(a) si deve trovare un vettore u ortogonale a quelli che generano il piano $W = tv + sw$ dove $v = (1,1,1)$ $w = (1,0,1)$ da cui, ad esempio, $u = (1,0,-1)$ quindi la retta cercata è $r = tu$

(b) la matrice cercata è $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ da cui $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) si deve studiare il sistema lineare $(0,1,0) + t(1,0,0) + s(0,0,1) = t'(1,0,-1)$: questo sistema **non ammette soluzioni**.

Esercizio 2.

La matrice associata è:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Gli autovalori di A sono: -1 di molteplicità algebrica 2 e 1 con autovettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow 1$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow -1$ segue immediatamente che gli autovalori di $A^8 + A^5$ sono : 0 con molteplicità 2 e 2 con molteplicità 1, gli autospazi sono $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 0, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 2$

(b) Il sistema ha ∞^1soluzioni perchè è l'equazione per l'autovalore zero che ha molteplicità geometrica =1.

Esercizio 3.

Gli autovalori di A sono $0, a, b, c, d,$ dove a, b, c, d sono le quattro radici quarte distinte di -1.($\left\{a = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2}\right\}, \left\{b = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{2}\right\}, \left\{c = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{2}\right\}, \left\{d = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2}\right\}$) la matrice non è invertibile ed è diagonalizzabile. Gli autovalori di A^4 sono $0^4 = 0$ e a^4, b^4, c^4, d^4 che, per definizione, sono tutti uguali a -1. La matrice A^4 è diagonalizzabile perchè A lo è e il suo polinomio caratteristico è $p(z) = -z(z+1)^4$.

Esercizio 4.

$V^\perp$ è generato da due vettori v' e u' indipendenti e ortogonali a $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ad esempio: $v' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ una matrice del tipo richiesto deve avere rango 2 e due colonne uguali a v' e u', ad esempio, $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 5.

La verifica della bilinearità dell' applicazione ϕ è immediata: basta osservare la sua espressione analitica. La matrice ad essa associata è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

che risulta essere simmetrica. Risulta allora definita la forma quadratica:

$$\phi^* (u) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 + x_3^2$$

Tale forma quadratica risulta essere dedfinita positiva; infatti

$$\begin{aligned} \phi^* (u) &= x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ &= (x_1 + 2x_2)^2 + x_2^2 + x_3^2 \end{aligned}$$

dunque è una quantità sempre non negativa, e pari a zero se e solo se tutte la componenti del vettore u si annullano contemporaneamente. Per quanto riguarda la ricerca di una base ortogonale di V applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt alla base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$; definiamo:

$$\begin{aligned} v_1 &= e_1 = (1, 0, 0) \\ v_2 &= e_2 - \frac{\phi(v_1, v_2)}{\phi(v_1, v_1)} v_1 \\ &= (0, 1, 0) - 2(1, 0, 0) = (-2, 1, 0) \end{aligned}$$

ed infine è sufficiente osservare che il vettore e_3 è ortogonale sia ad e_1 che ad e_2, e dunque anche ad una loro qualsiasi combinazione lineare. Definiamo allora:

$$v_3 = e_3 = (0, 0, 1)$$

Un vettore $u = (x, y, z) \in U = span\,(u_1, u_2)$ se e solo se:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ -1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} = 0$$

dunque se e solo se:

$$x + y + z = 0$$

Per quanto riguarda il complemento ortogonale di U si ha:

$$U^{\perp} = \left\{ v\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \phi\,(v, v_1) = 0, \phi\,(v, v_2) = 0 \right\}$$

per cui devono essere contemporaneamente soddisfatte le condizioni:

$$(x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

che danno luogo al sistema di equazioni:

$$\begin{cases} -x - 3y = 0 \\ -x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

che definiscono $U^{\perp}$.