Geometria (Informatica) — 14 gennaio 2001

Ricordo le "regole del gioco": sotto i 16.5 punti si deve ripetere lo scritto, tra 16.5 e 18 si ***deve*** *fare l'orale, sopra i 18 si* ***può*** *fare l'orale.*

1. Fissata in $\mathbb{C}^3$ la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ si consideri l'applicazione lineare f definita da:

$$
\begin{aligned}
f(e_1) &= ie_2 - e_3 \\
f(e_2) &= -ie_1 + 2e_2 \\
f(e_3) &= e_1 + 2e_3
\end{aligned}
$$

   (a) Trovare una base per il nucleo e una base per l'immagine **(3 punti).**
   (b) Trovare autovalori e autovettori **(3 punti)**
   (c) E' diagonalizzabile ? **(3 punti)**
   (d) Quante soluzioni ha il sistema lineare $A^{10}(v) = 4v$ (dove A è la matrice associata a f e $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$)? **(4 punti)**
   (e) Quante soluzioni ha il sistema lineare $A^3(v) = 8v$? **(3 punti)**

2. Si considerino, in $\mathbb{R}^3$, i piani W e V di equazioni cartesiane $x - y - z = 0$ e $x + y = 0$.

   (a) Trovare l'equazione **parametrica** della retta $r = V \cap W$ **(3 punti)**
   (b) Scrivere una applicazione lineare di nucleo r e immagine U (dove U è il piano ortogonale a r e passante per l'origine delle coordinate. **(4 punti)**

3. Determinare i possibili autovalori di una matrice **reale** A tale che $A^3 = -A$ (**4 punti**)

   (a) Si scriva una matrice **complessa e invertibile** a due righe e due colonne che verifichi la condizione data (**3 punti**)