# Geometria (Informatica) — 19 Dicembre 2001

1. Si consideri l'applicazione lineare $f$ da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$ definita, nella base $e_1, e_2, e_3$, da:

$$\begin{array}{l} f(e_1) = -e_1 + e_2 \\ f(e_{2)} = e_1 - e_2 \\ f(e_3) = -e_1 + e_2 + e_3 \end{array}$$

   Trovare una base del nucleo e una base dell'immagine. **(4 punti)**

2. Trovare autovalori e autovettori della matrice associata a $f$. (**5 punti)**

3. Trovare il **vettore** $f(v)$ e **l'insieme** $f^{-1}(v)$ dove $v = e_1 + e_2 + e_3$. (**4 punti)**

4. Studiare, al variare di $k \in \mathbb{R}$ , il seguente sistema lineare: **(5 punti)**

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ kx - ky + z = 1 \\ x - k^2 y + k^2 z = 1 \end{cases}$$

5. Quali sono i possibili autovalori di una matrice complessa $A$ tale che $A^2 = iI$ ? (ricordiamo che $I$ è la matrice con tutti 1 sulla diagonale principale e tutti 0 fuori dalla diagonale). (**4 punti**)

6. Scrivere una matrice complessa $2 \times 2$ che verifichi $A^2 = iI$. (**4 punti**)

7. Sia $A$ una qualsiasi matrice dell'esercizio **5**. Quante soluzioni ha il sistema lineare $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ? **(4 punti)**