SOLUZIONI 14 gennaio 2002

Esercizio 1

La matrice è:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i & 1 \\ i & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

base immagine: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, base del nucleo: $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

autovettori e corrispondenti autovalori:

$$\left\{ \begin{matrix} 2 \\ -i \\ 1 \end{matrix} \right\} \leftrightarrow 0, \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ i \end{matrix} \right\} \leftrightarrow 2$$

La matrice **non è diagonalizzabile** perchè la somma delle dimensioni degli autospazi è 2 e non 3.

Sistema lineare $A^{10}(v) = 4v$:questa **è l'equazioni agli autovalori di** A^{10} , ma 4 **non è autovalore** (perchè non è la decima potenza di nessun autovalore di A) per cui **il sistema omogeneo ha come unica soluzione la soluzione nulla.**

Sistema lineare $A^3(v) = 8v$:questa **è l'equazioni agli autovalori di** A^3 , nel caso di autovalore 8 (che è proprio il cubo dell'autovalore 2 di A). Ne segue che **lo spazio delle soluzioni** (che è l'autospazio dell'autovalore 8) **ha dimensione uno** (infatti l'autovalore 2 della matrice A ha un autospazio di dimensione uno come calcolato all'esercizio precedente e si sa che una matrice e tutte le sue potenze hanno gli stessi autospazi).

Esercizio n.2

L'intersezione si ottiene dal sistema:

$$\left\{ \begin{matrix} x - y - z = 0 \\ x + y = 0 \end{matrix} \right\}$$

le soluzioni sono i vettori del tipo $v = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 2x \end{pmatrix}$ per cui **l'equazione parametrica** è $r = t(1, -1, 2)$.

Per trovare U si devono trovare due vettori indipendenti e ortogonali a v.

Per esempio $u = (1, 1, 0)$ e $w = (0, 2, 1)$. U è allora *span* $\{u, w\}$

La matrice della applicazione lineare deve avere **due colonne uguali ai vettori** u e w (così siamo certi che ha come immagine il loro *span* cioè proprio U). **L'altra colonna** si determina imponendo che la matrice applicata a v dia 0 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè $\begin{pmatrix} 1+2a \\ -1+2b \\ -1+2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ per cui: $a = -1/2$, $b = 1/2$, $c = 1/2$.

La matrice richiesta è, allora: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 1 & 2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$

Esercizio n.3

Sia $Av = \lambda v$; siccome $A^3 = -A$ si ha: $A^3 v = \lambda^3 v$ e $A^3 v = -Av = -\lambda v$. Ne segue che $\lambda^3 + \lambda = 0$, (notare che v è un autovettore e quindi non è nullo). Quindi i possibili autovalori possono essere solo $0, i. - i$; di questi solo lo zero è reale e può quindi essere un autovalore di una matrice reale.

Una matrice **complessa e invertibile** che verifica le condizioni poste dall'esercizio è, ad esempio, $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$.