Soluzioni dello scritto del 3 luglio 2001

Esercizio 1.

(a) Si deve studiare il sistema lineare in tre incognite $t(1,1,-1) + s(1,0,1) = (1,0,0) + u(1,k,0)$ e vedere per che valori di k questo sistema **non ammette soluzioni**.

Il sistema si scrive

$$\begin{cases} t + s - u = 1 \\ t - ku = 0 \\ -t + s = 0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -k \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è $2k-1$, per cui questa matrice ha rango 2 per $k = 1/2$. La matrice completa è

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -k & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 3 per ogni valore di k. **Ne discende che per $k = 1/2$ il sistema non ammette soluzione**.

(b) Risolvendo il sistema per $k = 1$ si trova subito che la soluzione è $(2,1,0)$

Esercizio 2.

(a) Gli autovalori di A sono le **quattro radici quarte** di -1, cioè, **ricordando che** $-1 = e^{i\pi/4}$,

$$\lambda_1 = e^{i\pi/4}, \lambda_2 = e^{i\pi/4+2\pi i/4} = ie^{i\pi/4}, \lambda_3 = e^{i\pi/4+4\pi i/4} = -e^{i\pi/4}, \lambda_4 = e^{i\pi/4+6\pi i/4} = -ie^{i\pi/4}$$

oppure, esplicitando, $\left\{\lambda_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2}\right\}$, $\left\{\lambda_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{2}\right\}$, $\left\{\lambda_4 = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{2}\right\}$, $\left\{\lambda_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2}\right\}$

(b) Gli autovalori sono tutti distinti e quindi la matrice è diagonalizzabile.

(**c**) Gli autovalori di A^2 sono i quadrati degli autovalori di A :

$$\lambda_1 = (e^{i\pi/4})^2 = e^{i\pi/2} = i, \lambda_2 = (ie^{i\pi/4})^2 = -i, \lambda_3 = (-e^{i\pi/4})^2 = i, \lambda_4 = (-ie^{i\pi/4})^2 = i$$

(d) Il polinomio caratteristico è il polinomio le cui radici sono gli autovalori, con le loro molteplicità, per cui:

$$p(z) = (z-i)^2(z+i)^2$$

(**e**) Una matrice **non** diagonalizzabile è, ad esempio, $B = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$ infatti gli autovettori indipendenti sono solo **tre**: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow i, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow -i$

Esercizio 3.

Si vede subito che $z = v - 2u$ mentre u e v sono indipendenti tra loro, e anche u, z e w sono indipendenti tra loro. Questo implica che la dimensione di U è 2 (con base u e v) e che la dimensione di V è 3 (con base u, v, w) **infatti si può scrivere** z **in funzione di** u **e** v) Queste considerazioni forniscono immediatamente che: $U \cap V = U$ e $(U + V) = V$.

Esercizio 4.

(a) La verifica della bilinearità dell' applicazione ϕ è immediata: basta osservare la sua espressione analitica. La matrice ad essa associata è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

che risulta essere simmetrica. Risulta allora definita la forma quadratica:

$$\phi^* (u) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_3^2$$

Tale forma quadratica risulta essere definita positiva; infatti

$$\begin{aligned} \phi^* (u) &= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 + x_3^2 \end{aligned}$$

(b) Un vettore $u = (x, y, z) \in U = span\,(u_1, u_2)$ se e solo se:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} = 0$$

dunque se e solo se:

$$x - y - z = 0$$

Per quanto riguarda il complemento ortogonale di U si ha:

$$U^\perp = \left\{ v\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \phi\,(v, v_1) = 0, \phi\,(v, v_2) = 0 \right\}$$

per cui devono essere contemporaneamente soddisfatte le condizioni:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$