Geometria 1A (fisica) — 19 Marzo 2001

Con meno di 16.5 punti si deve ripetere lo scritto, tra 16.5 e 18 si ***deve*** *fare l'orale, sopra i 18 si* ***può*** *fare l'orale.*

1. Si considerino in $\mathbb{R}^3$ i piani W e Z di equazioni parametriche $W = t(1,0,0) + s(1,0,1)$ e $Z = (0,1,0) + t(1,0,0) + s(0,0,1)$.

   (a) Trovare una retta r passante per l'origine e ortogonale al piano W. **(2 punti)**

   (b) Scrivere una applicazione lineare che abbia come immagine il piano W e come nucleo la retta r . **(2 punti)**

   (c) Trovare il punto di intersezione tra la retta r e il piano Z . **(2 punti)**

2. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= e_1 \\ f(e_2) &= 2e_1 - e_2 \\ f(e_3) &= 3e_1 + e_2 - e_3 \end{aligned}$$

   (a) Sia A la matrice associata; trovare autovalori e autospazi di $A^6 - A^3$ **(3 punti)**

   (b) Quante soluzioni ha il sistema omogeneo $(A^6 - A^3)^{10} v = 0$ (dove $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$)**(4 punti)**

3. Sia A una matrice **complessa** 4×4 con polinomio caratteristico $p(z) = z(z^3 - 1)$.

   (a) A è invertibile? **(2 punti)**

   (b) A è diagonalizzabile? **(3 punti)**

   (c) Scrivere il polinomio caratteristico di A^3. **(4 punti)**

4. Siano $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $V = span\,\{v, u\}$

   (a) Mostrare che A definisce un prodotto scalare in $\mathbb{R}^4$ (**4 punti**)

   (b) Trovare un base del complemento ortogonale di V rispetto al prodotto scalare definito da A (**4 punti**)