Geometria 1A (fisica,matematica e informatica) — 3 aprile 2001

Con meno di 16.5 punti si deve ripetere lo scritto, tra 16.5 e 18 si ***deve*** *fare l'orale, sopra i 18 si* ***può*** *fare l'orale.*

Matematici e Fisici devono svolgere anche l'esercizio n. 5 e il punteggio sarà riportato arrotondato a 30/30.

1. Si considerino in $\mathbb{R}^3$ i piani W e Z di equazioni parametriche $W = t(1,1,1) + s(1,0,1)$ e $Z = (0,1,0) + t(1,0,0) + s(0,0,1)$.

   (a) Trovare una retta r passante per l'origine e ortogonale al piano W. **(2 punti)**

   (b) Scrivere una applicazione lineare che abbia come immagine il piano W e come nucleo la retta r . **(2 punti)**

   (c) Discutere l'intersezione tra la retta r e il piano Z . **(2 punti)**

2. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= -e_1 \\ f(e_2) &= 2e_1 + e_2 \\ f(e_3) &= 3e_1 + e_2 - e_3 \end{aligned}$$

   (a) Sia A la matrice associata; trovare autovalori e autospazi di $A^8 + A^5$ **(3 punti)**

   (b) Quante soluzioni ha il sistema omogeneo $(A^8 + A^5)^8 v = 0$? (dove $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$)**(4 punti)**

3. Sia A una matrice **complessa** 5×5 con polinomio caratteristico $p(z) = -z(z^4 + 1)$.

   (a) A è invertibile? **(2 punti)**

   (b) A è diagonalizzabile? **(3 punti)**

   (c) Scrivere il polinomio caratteristico di A^4 e discutere la sua diagonalizzabilità. **(4 punti)**

4. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i vettori $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e il sottospazio $V = span\,\{v, u\}$

   (a) Trovare un base del sottospazio $V^\perp$ortogonale a V rispetto al prodotto scalare usuale di $\mathbb{R}^4$(**4 punti**)

(b) Scrivere, **nella base canonica di** $\mathbb{R}^4$, la matrice di una qualsiasi applicazione lineare che abbia come immagine $V^{\perp}$**(4 punti)**

5. Sia $V = \mathbb{R}^3$. Posto

$$\phi(u, v) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2 + 3x_3y_3$$

dove $u = (x_1, x_2, x_3)$ e $v = (y_1, y_2, y_3)$

(a) verificare che ϕ induce un prodotto scalare e trovare una base ortogonale di V rispetto a **questo** prodotto scalare.(**3 punti**)

(b) Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $u_1 = (1, -1, 0)$ e $u_2 = (-1, 0, 1)$. Determinare le equazioni di U e quelle del complemento ortogonale $U^{\perp}$.(**3 punti**)