Soluzioni dello scritto del 19 dicembre 2001

Esercizio 1.

La matrice è: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, per cui si ottiene:

Base dell'immagine : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Base del nucleo : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Esercizio 2.

Autovettori e autovalori della matrice:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow -2, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 0, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 1$$

.

Esercizio 3.

$$f \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mentre } v \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ per cui:}$$

$$f(v) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

I vettori appartenenti a $f^{-1}(v)$, chiamiamoli $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, sono quelli per cui $f(u) = v$. Quindi:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y-z \\ x-y+z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per cui risulta che $f^{-1}(v) =$ **l'insieme vuoto** (infatti il sistema è impossibile)

Esercizio 4.

La matrice del sistema è $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ k & -k & 1 \\ 1 & -k^2 & k^2 \end{pmatrix}$ il cui determinante è $-k^3 + k^2 - 1 + k$. Il determinante si annulla quando $\{k = -1\}, \{k = 1\}$. Per cui, per $k \neq \pm 1$ **il sistema è risolubile con una sola soluzione.**
La matrice completa è:
$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ k & -k & 1 & 1 \\ 1 & -k^2 & k^2 & 1 \end{pmatrix}$ il cui rango è 1 per $k = 1$ e 2 per $k = -1$. Per quanto riguarda la matrice A si ha che il suo rango è 1 se $k = 1$ ed è 2 se $k = -1$. **Si vede quindi che per $k = 1$ il sistema ha ∞^2soluzioni e per $k = -1$ il sistema ha ∞^1 soluzioni.**

Esercizio 5.

Gli autovalori devono verificare: $\lambda^2 = i$. Le cui soluzioni sono:

$$\left\{\lambda_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2}\right\}, \left\{\lambda_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{2}\right\}$$

.

Esercizio 6.

Basta usare il risultato dell'esercizio **5.** Ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Esercizio 7.

Basta usare il risultato dell'esercizio 5**. La matrice è invertibile (perchè ha autovalori diversi da zero) e quindi il sistema omogeneo ha solo la soluzione nulla.**