Soluzioni dello scritto del 19 Settembre 2001

Esercizio 1.

$U = t(1,0,1) + s(0,1,1)$ e $V = t'(1,0,1) + s'(-1,0,1)$

(a) uguagliando i piani si ottiene subito $s = s' = 0$ e $t = t'$ per cui $r = t(1,0,1)$

(**b**) deve essere $(a,b,c)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 0$ e $(a,b,c)\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = 0$ si ottiene subito $a = c = 0$ e quindi $r' = (t(0,1,0)$

(**c**) deve essere $(1,0,k) = t(1,0,1) + s(-1,0,1)$ si ottiene il sistema lineare $\begin{cases} t - s = 1 \\ t + s = k \end{cases}$ questo sistema è di rango massimo e quindi ammette sempre soluzioni per tutti i valori di k.

(**d**) deve essere $(k^2, 0, -k)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 0$ e $(k^2, 0, -k)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = 0$, si ottiene subito $k = 0$

Esercizio 2.

La matrice è $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, il cui polinomio caratteristico è $P(X) = X^4 - 8X^3 + 26X^2 - 40X + 25$.

Sostituendo si verifica che $P(2+i) = 0$ per cui $\lambda = 2 + i$ **è un autovalore**.

Eseguendo la divisione: $(x^4 - 8x^3 + 26x^2 - 40x + 25)/(x-2-i)^2 = x^2 - 4x + 2ix + 3 - 4i$ **si trova resto uguale a zero per cui è verificato che $\lambda = 2+i$ è un autovalore doppio.**

Gli altri autovalori sono le radici di $x^2 - 4x + 2ix + 3 - 4i = 0$, ovvero $x = 2 - i$ **con molteplicità due**.

Per la diagonalizzabilità si studiano le dimensioni degli autospazi, cioè le molteplicità geometriche. Ad esempio, quella dell'autovalore $\lambda = 2 + i$ è:

$$\begin{pmatrix} -i & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1-i & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1-i & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ix - y - t \\ x + (1-i)\,y - z \\ x + y + (-1-i)\,z + t \\ y - z - it \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si trova $t = 0$ e $y = z = -ix$ per cui la **molteplicità geometrica è uguale a uno** e quindi **la matrice non è diagonalizzabile** (perchè almeno uno dei suoi autovalori non è regolare)**.**

Dal polinomio caratteristico si legge subito che $\det A = 25$ per cui **la matrice è invertibile**; essendo invertibile **ha rango massimo** e quindi il sistema lineare $Au = b$ **è risolubile ed ha una sola soluzione**.