Geometria (informatica) — 24 Aprile 2002

1. Si considerino in $\mathbb{R}^3$ i piani W e Z di equazioni parametriche $W = t(1,1,1)+s(-1,1,-1)$ e $Z = (2,0,-2) + t(3,3,3) + s(2,4,2)$.

   (a) Trovare una retta r passante per l'origine e ortogonale al piano W. **(2 punti)**

   (b) Scrivere una applicazione lineare che abbia come immagine la retta r e come nucleo il piano W . **(2 punti)**

   (c) Trovare il punto di intersezione tra la retta r e il piano Z . **(2 punti)**

   (d) Mostrare che i piani W e Z sono paralleli. **(3 punti)**

2. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ data da:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= ie_1 \\ f(e_2) &= e_1 + e_2 \\ f(e_3) &= e_1 + e_2 + ie_3 \end{aligned}$$

   (a) Sia A la matrice associata; trovare autovalori e autospazi di $A^{20} - A^{40}$ **(4 punti)**

   (b) Quante soluzioni ha il sistema lineare omogeneo $(A^8 - A^4)\vec{v} = \vec{0}$? (dove $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$) **(4 punti)**

3. Sia A una matrice **complessa** 8×8 con polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^8 - 2\lambda^4 + 1$

   (a) A è invertibile? **(2 punti)**

   (b) Trovare gli autovalori e le loro molteplicità algebriche. **(4 punti)**

   (c) Scrivere il polinomio caratteristico di A^4. **(5 punti)**

4. Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ k^2x + y + z = k \\ k^2x + y = 0 \end{cases}$$

   con k parametro reale.

   (a) Trovare i valori di k per cui il sistema ha una sola soluzione. **(3 punti)**

   (b) Trovare i valori di k per cui il sistema non ammette soluzione. **(4 punti)**