Geometria (Informatica) — 27 Giugno 2002

1. Fissata in $\mathbb{C}^3$ la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ si consideri l'applicazione lineare **complessa** definita da:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= ke_1 + e_2 \\ f(e_2) &= -e_1 + ke_2 \\ f(e_3) &= e_3 \end{aligned}$$

   (a) Scrivere la matrice associata, trovarne il polinomio caratteristico e gli autovalori. **(3 punti)**

   (b) Si studi la diagonalizzabilità della matrice associata al variare di k in $\mathbb{C}$. **(5 punti)**

   (c) Per che valori di k la matrice è invertibile? **(2 punti)**

   (d) Per che valori di k la matrice possiede l'autovalore $\lambda = 2i$? **(4 punti)**

2. Considerata la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

   a. Trovare gli autovalori. **(3 punti)**

   b. Mostrare che è diagonalizzabile **(4 punti)**

   c. Mostrare che il vettore $v = 5e_1 + 5e_2 + 5e_3$ appartiene all'immagine della matrice. **(3 punti)**

3. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 3 con base $\{1, x, x^2, x^3\}$ Cioè:

$$V \equiv \left\{ v = a + bx + cx^2 + dx^3 \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

e si consideri l'applicazione lineare f da V a V definita dalla seguente espressione:

$$f(v) = 2x\frac{dv}{dx}$$

a. Trovare nucleo e immagine di f. **(4 punti)**
b. Trovare, *nella base indicata*, la matrice della applicazione f. **(4 punti)**
c. Trovare il rango di f. **(2 punti)**