Soluzioni dello scritto del 24 Aprile 2002

Esercizio 1.

$W = t(1,1,1) + s(-1,1,-1)$ e $Z = (1,0,-1) + t'(3,3,3) + s'(2,4,2)$

(a) la retta sarà $r = t(a,b,c)$ e deve essere $(a,b,c)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0$ e $(a,b,c)\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} = 0$. Si ottiene subito $r = t(1,0,-1)$.

(**b**) Deve essere, ad esempio,

$$\begin{pmatrix}1 & a & a'\\0 & b & b'\\-1 & c & c'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+a+a'\\b+b'\\-1+c+c'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & a & a'\\0 & b & b'\\-1 & c & c'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1+a-a'\\b-b'\\1+c-c'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Si ottiene subito $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ e $a' = -1$, $b' = 0$, $c' = 1$

(**c**) deve essere $t'(1,0,-1) = (2,0,-2) + t(3,3,3) + s(2,4,2)$ è immediato verificare che $t = s = 0$ e $t' = 2$ è una soluzione; il punto di intersezione è, quindi, $(2,0,-2)$.

(**d**) siccome $(1,1,1)$ e $(3,3,3)$ sono proporzionali, basta verificare che $(1,1,1)$, $(-1,1,-1)$ e $(2,4,2)$ sono dipendenti. Questo è immediato perchè $\det\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\1 & 1 & 4\\1 & -1 & 2\end{pmatrix} = 0$.

Esercizio 2.

La matrice è $A = \begin{pmatrix}i & 1 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & i\end{pmatrix}$ con autovettori e autovalori:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1-i\\0\end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 1, \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow i.$$

L'unico autovalore di $A^{20} - A^{40}$ è quindi 0 con autospazio generato da:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1-i\\0\end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 0$$

L'unico autovalore di $(A^8 - A^4)$ è 0 , con autospazio generato da:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1-i\\0\end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 0$$

Il sistema $(A^8 - A^4)\, v = 0$ ha quindi ∞^2 soluzioni.

Esercizio 3.

(b e **a)** Essendo $p(\lambda) = \lambda^8 - 2\lambda^4 + 1$, la matrice ha per autovalori $1, -1, i, -i$ tutti con molteplicità algebrica uguale a 2 (basta porre $\lambda^4 = x$ e si trova $x^2 - 2x + 1 = 0$ cioè $x = 1$ con molteplicità uguale a 2 e quindi i valori di λ sono le quattro radici quarte di 1, ciascuna con molteplicità uguale a 2). La matrice è invertibile perchè non ammette l'autovalore 0.

(c) Gli autovalori di A^4 sono le quarte potenze degli autovalori di A. Si ottiene sempre 1 la cui molteplicità diventa quindi uguale a 8 . Il polinomio caratteristico è, quindi, $p(\lambda) = (1 - \lambda)^8$.

Esercizio 4.

La matrice dei coefficienti è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k^2 & 1 & 1 \\ k^2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha determinante $-1 + k^2$. I problemi di risolubilità del sistema possono sorgere solo quando questa matrice ha rango uguale a **due**. Questo accade se $k = +1$ e -1. La matrice completata è :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k^2 & 1 & 1 & k \\ k^2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango uguale a **due** per $k = 1$ e ha rango uguale a **tre** per $k = -1$ (basta contare le colonne indipendenti).

Ricapitolando, per $k = 1$ il sistema ha $\infty^{incognite-rango} = \infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni, per $k = -1$ il sistema non ammette soluzione, mentre per $k \neq \pm 1$ il sistema ha $\infty^{incognite-rango} = \infty^{3-3} = \infty^0$ soluzioni.