Soluzioni dello scritto del 13 giugno 2002

Esercizio 1.

La matrice è $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, con polinomio caratteristico $p(\lambda) = -\lambda^3 + k - 1 + k\lambda$ e con autovalori $-1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(-3+4k)}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(-3+4k)}$. Naturalmente gli autovalori devono essere reali, per cui $k \geq 3/4$. Ci sono autovalori coincidenti solo quando $k = 4/3$ (autovalori $-1.1/2, 1/2$) e $k = 3$ (autovalori $-1. -1, 2$).

Quando $k = 3/4$ l'autospazio dell'autovalore doppio $1/2$ è generato da : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{5} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix} \right\}$ e quindi ha dimensione 1.

Quando $k = 3$ l'autospazio dell'autovalore doppio -1 è generato da : $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ e quindi ha dimensione 1.

La matrice è diagonalizzabile per $k > 3/4$ **ma** $\neq 3$. Se $k = 1$ gli autovalori diventano $-1, 1, 0$ per cui la matrice non è invertibile.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ per cui il vettore dato è un autovettore solo per $k = 1$.

Esercizio 2.

La matrice data è a blocchi che si possono studiare separatamente. Il primo blocco è $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ che ha rango 1 e quindi la dimensione del nucleo è 2; l'autovalore $\lambda = 0$ è quindi regolare. Osservando che

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix} = 15 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

si vede subito che 15 è un altro autovalore, la sua molteplicità è 1 e quindi il blocco è diagonalizzabile. Il secondo blocco è $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$ il suo rango è 1 e quindi la dimensione del nucleo è 1; l'autovalore $\lambda = 0$ è quindi regolare. Osservando che

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

si vede subito che 15 è un altro autovalore, la sua molteplicità è 1 e quindi il blocco è diagonalizzabile. La matrice è quindi diagonalizzabile, i suoi autovalori sono: $\lambda = 0$ con molteplicità algebrica e geometrica 3 e $\lambda = 10$, $\lambda = 15$ con molteplicità 1. Gli autospazi corrispondenti sono generati da:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\leftrightarrow 15, \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}\leftrightarrow 10, \left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}\leftrightarrow 0$$

Esercizio 3.

I vettori dati sono: $v = (2, 1, 1)$ $w = (-1, 3, 1)$ $u = (4, -5, -1)$; si vede che $w = \frac{1}{2}(v - u)$ per cui $U = span\{v, u\}$ e $V = span\{v, w, u\}$ sono coincidenti. Allora è chiaro che $\dim U \cap V = \dim U = 2$ e $\dim U + V = \dim U = 2$. Per trovare la retta si deve trovare un vettore ortogonale sia a v che a w. Un vettore di questo tipo è, ad esempio, $\eta = (2/3, 1, -7/3)$ e quindi la retta è $r = (4, -5, -1) + t(2/3, 1, -7/3)$.

Esercizio 4.

La matrice di codifica è: $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ il cui determinante è 2 che è $\neq 0 \mod 3$. La matrice è quindi invertibile $\mod 3$. La sua inversa "normale" è $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$. L'inversa $\mod 3$ è quindi $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (notare che $1/2 = x \mod 3$ ha come soluzione 2).

A questo punto $\{a, a, b, b, c, a\}$ si spezza in blocchi da 2 elementi e si associano i numeri alle lettere: $\{(0, 0), (1, 1), (2, 0)\}$. Ogni blocco si codifica con la matrice A :

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mod 3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mod 3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \mod 3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si ottiene quindi: $\{a, a, b, b, c, a\} \to \{a, a, a, b, b, b\}$.

Analogamente si procede per decodificare, si usa la matrice A^{-1} ; si parte da $\{a, c, c, a\} \to \{(0, 2), (2, 0)\}$ e quindi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \mod 3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \mod 3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per cui $\{a, c, c, a\}$ decodificato vale $\{c, c, c, b\}$.