Geometria (Informatica) — 13 Giugno 2002

1. Fissata in $\mathbb{R}^3$ la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ si consideri l'applicazione lineare **reale** definita da:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= e_2 + e_3 \\ f(e_2) &= e_1 + e_3 \\ f(e_3) &= ke_1 - e_2 \end{aligned}$$

   (a) Scrivere la matrice associata, trovarne il polinomio caratteristico e gli autovalori. **(3 punti)**

   (b) Si studi la diagonalizzabilità della matrice associata al variare di k in $\mathbb{R}$. **(5 punti)**

   (c) Per che valori di k la matrice è invertibile? **(2 punti)**

   (d) Per che valori di k il vettore $v = e_1 + e_3$ è un autovettore ? **(3 punti)**

2. Considerata la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

   a. Trovare gli autovalori. **(3 punti)**

   b. Mostrare che è diagonalizzabile **(3 punti)**

3. Fissata in $\mathbb{R}^3$ la base canonica si considerino i seguenti vettori:

$$v = (2, 1, 1) \quad w = (-1, 3, 1) \quad u = (4, -5, -1)$$

   ed i seguenti sottospazi: $U = span\{v, u\}$ e $V = span\{v, w, u\}$.

   a. Calcolare le dimensioni di $U \cap V$ e di $U + V$. **(4 punti).**

   b. Scrivere l'equazione della retta passante per u e ortogonale al piano che contiene v e w. **(4 punti).**

4. In uno schema di crittografia modulo 3 a matrici 2×2, in cui tutti i messaggi trasmessi e ricevuti sono costituiti dalle stringhe composte dalle lettere $\{a, b, c\}$,si consideri la seguente associazione $\{a = 0, b = 1, c = 2\}$. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ la matrice di codifica.

   a. Mostrare che la matrice A è invertibile **modulo** 3 e trovarne l'inversa **modulo** 3. **(4 punti).**

   b. Codificare la stringa $\{a, a, b, b, c, a\}$ **(3 punti).**

   c. Decodificare la stringa $\{a, c, c, a\}$ **(3 punti).**