Soluzioni dello scritto del 14 Marzo 2002

Esercizio 1.

$W = t(1,2,1) + s(1,1,-1)$ e $Z = (3,-2,1) + t'(3,6,3) + s'(-2,-2,2)$

(a) la retta sarà $r = t(a,b,c)$ e deve essere $(a,b,c)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = 0$ e $(a,b,c)\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = 0$. Si ottiene subito $a = -3b/2$ e $c = -b/2$ e quindi $r = t(-3/2, 1, -1/2)$.

(**b**) Deve essere, ad esempio, $\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 2 & 1 & b\\ 1 & -1 & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3/2\\1\\-1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a\\ -2-\frac{1}{2}b\\ -\frac{5}{2}-\frac{1}{2}c\end{pmatrix}$. Si ottiene subito $a=-1$, $b=-4$, $c=-5$

(**c**) deve essere $t'(-3/2,1,-1/2) = (3,-2,1)+t(3,6,3)+s(-2,-2,2)$ è immediato verificare che $t=s=0$ e $t'=-2$ è la soluzione; il punto di intersezione è, quindi, $(3,-2,1)$.

(**d**) ovvio perchè i vettori generanti sono proporzionali a due a due, e quindi i piani sono paralleli.

Esercizio 2.

La matrice è $A = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$, con autovettori e autovalori:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 1, \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow -1.$$

Gli autovalori di $A^8 - A^3$ sono 0 e 2, con autovettori, rispettivamente,

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 0, \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 2.$$

Gli autovalori di $(A^8 - A^3)^2$ sono 0 e 4, con autovettori, rispettivamente,

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 0, \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 4$$

Il sistema $(A^8 - A^3)^2 v = 4v$ ha quindi ∞^1soluzioni, date da $y = z = 0$ e x arbitrario.

Esercizio 3.

(a) Essendo $p(\lambda) = -\lambda^2 - \lambda^5 = -\lambda^2(1+\lambda^3)$, la matrice ha autovalori: 0 con molteplicità algebrica uguale a 2 e le **tre radici terze di** -1 con molteplicità algebrica e geometrica uguale a 1. La matrice risulta diagonalizzabile solo se l'autovalore 0 ha molteplicità geometrica uguale a 2, cioè se il rango della matrice è 3.

(b) Gli autovalori di $A^{12} = (A^3)^4$ sono: 0 con molteplicità algebrica uguale a 2 e $1 = \left((\sqrt[3]{-1})^3\right)^4$ con molteplicità algebrica uguale a 3 . Il polinomio caratteristico è, quindi, $p(\lambda) = \lambda^2(1-\lambda)^3$.

Esercizio 4.

(a) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2k+2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k & 3k \end{pmatrix}$$

è a blocchi che vanno studiati separatamente:

$\begin{pmatrix} 3 & k \\ 0 & k \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile per $k \neq 3$, il secondo blocco: $\begin{pmatrix} 2k & 0 \\ 2k+2 & -2 \end{pmatrix}$ è **sempre** diagonalizzabile (il problema potrebbe essere $k = -1$ ma in questo caso il blocco è già diagonale!), il terzo blocco è $\begin{pmatrix} k & 1 \\ k & 3k \end{pmatrix}$; gli autovalori sono: $2k+\sqrt{(k^2+k)}, 2k-\sqrt{(k^2+k)}$ quindi se $k^2+k > 0$, cioè $\{k < -1\}, \{0 < k\}$ il blocco è diagonalizzabile. Se $k = -1$ il blocco non è diagonalizzabile perchè l'autovalore -2 ha molteplicità algebrica 2 ma geometrica 1.

In definitiva: **la matrice data è diagonalizzabile per $k < -1$ e $k > 0$ ma $\neq 3$**

(b) Per $k = -1$ la matrice data diventa:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Si devono studiare i blocchi: il primo blocco non interviene perchè ha autovalori 3 e -1, il secondo blocco ha -2 come autovalore di molteplicità algebrica e geometrica 2 (autovettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$), il terzo blocco ha -2 come autovalore di molteplicità algebrica 2 e geometrica 1 (autovettore $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$) **L'autovalore -2 , come autovalore della matrice completa, ha quindi molteplicità algebrica 4 e geometrica 3.**

L'autospazio dell'autovalore -2 della matrice completa è quindi generato da:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$