Algebra (Informatica) — 18 dicembre 2002

Con più di 18 punti si può fare l'orale o accettare il voto dello scritto (30 e lode per chi risolve tutti gli esercizi); con meno di 17 punti si deve rifare lo scritto; con 17 o 18 punti si è ammessi all'orale.

1. **Trovare il minimo intero positivo x tale che: (4 punti)**

$$\textbf{a)}\ 21x = 7 \bmod 11$$
$$\textbf{b)}\ 4x = -11 \bmod 17$$

- Soluzione: **a)** $x = 7/21 \bmod 11 = 4$ (infatti $4 \times 21 = 84$ e 84 diviso 11 ha resto 7), **b)** $x = -11/4 \bmod 17 = 10$ (infatti $4 \times 10 = 40$, $40 \bmod 17 = 6$ e anche $-11 \bmod 17 = 6$.

2. **Risolvere in numeri interi le seguenti equazioni: (4 punti)**

$$\textbf{a)}\ 13x + 17y = 5$$
$$\textbf{b)}\ 11x - 17y = 1$$

- Soluzione: **a)** $\{x = -14 - 17N, y = 11 + 13N\}$ **b)** $\{x = 14 + 17N, y = 9 + 11N\}$

3. **Trovare il più piccolo intero positivo che diviso per 17 dia resto 5 e diviso per 23 resto 4 (4 punti)**

- Soluzione:

$$\begin{cases} x = 5 \bmod 17 \\ x = 4 \bmod 23 \end{cases}$$

La prima relazione fornisce $x = 5 + 17N$, la seconda $x = 4 + 23M$ (con N e M interi) per cui si ottiene $23M = 1 + 17N$ ovvero $M = 1/23 \bmod 17 = 3$ cioè, sostituendo, $x = 73 + 23 \times 17k$ (con k intero); il più piccolo positivo è quindi 73.

4. **Dimostrare che l'espressione $\frac{1}{11}\left(6n^{41} + 5n\right)$ rappresenta un numero intero per ogni n intero. (5 punti)**

- Soluzione: bisogna dimostrare che

$$6n^{41} + 5n = 0 \bmod 11$$

Ci sono due casi da studiare:
1) n **è multiplo di** 11 : non c'è niente da dimostrare, il resto è ovviamente 0.
2) n **non è divisibile per** 11 **:** il piccolo teorema di Fermat ci dice in questo caso che $n^{10} = 1 \bmod 11$ e quindi, ragionando $\bmod 11$,

$$6n^{41} + 5n = n(6n^{40} + 5) = n\left[6\left(n^{10}\right)^4 + 5\right] = n(6 + 5) = 11n = 0$$

5. **Risolvere, in campo complesso, l'equazione $x^4 + 50x^2 + 225 = 0$. (5 punti)**

Soluzione: basta porre $x^2 = y$ e si trova $y^2 + 50y + 225 = 0$, le cui soluzioni sono: $\{y = -45\}, \{y = -5\}$. Quindi i valori di x sono le radici quadrate di -5 e di -45. Ovvero le **quattro** soluzioni sono:

$$\left\{x = i\sqrt{5}\right\}, \left\{x = -i\sqrt{5}\right\}, \left\{x = 3i\sqrt{5}\right\}, \left\{x = -3i\sqrt{5}\right\}$$

6. **Calcolare** $(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^{75}$ **(5 punti)**

   - Soluzione: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} = e^{i\pi/3}$ per cui $(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^{75} = e^{75i\pi/3} = -1$

$$(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^{75} = -1$$

7. **Sia** u_n **una successione di numeri reali; trovare** u_n **sapendo che: (4 punti)**

$$u_{n+2} + 50u_{n+1} + 225u_n = 0$$
$$u_0 = 0$$
$$u_1 = 5$$

   - Soluzione: l'equazione di secondo grado associata è $x^2 + 50x + 225 = 0$, con soluzioni reali e distinte:

$$\{\alpha = -5\}, \{\beta = -45\}$$

la soluzione generale è quindi: $u_n = A\alpha^n + B\beta^n$. Le costanti A e B si ottengono da:

$$u_0 = A + B = 0$$
$$u_1 = A\alpha + B\beta = 5$$

Da cui: $A = 1/8$ e $B = -1/8$. In definitiva:

$$u_n = \frac{1}{8}(-5)^n - \frac{1}{8}(-45)^n$$