Algebra (Informatica) — 26 marzo 2003

Con più di 18 punti si può fare l'orale o accettare il voto dello scritto (30 e lode per chi risolve tutti gli esercizi); con meno di 17 punti si deve rifare lo scritto; con 17 o 18 punti si è ammessi all'orale.

1. **Trovare il minimo intero positivo x tale che: (4 punti)**

$$\textbf{a)}\ 17x = 7 \bmod 23$$
$$\textbf{b)}\ 13x = -11 \bmod 17$$

Soluzione: **a)** $x = 7/17 \bmod 23 = 18$, **b)** $x = -11/13 \bmod 17 = 7$

2. **Risolvere in numeri interi le seguenti equazioni: (4 punti)**

$$\textbf{a)}\ -13x + 17y = 15$$
$$\textbf{b)}\ 21x + 17y = -15$$

Soluzione: **a)** $\{y = 7 + 13N_1, x = 8 + 17N_1\}$ **b)** $\{y = -12 - 21N_1, x = 9 + 17N_1\}$

3. **Trovare tutti i numeri interi x che verificano la seguente coppia di congruenze: (4 punti)**

$$\begin{cases} x = 15 \bmod 17 \\ x = -5 \bmod 23 \end{cases}$$

Soluzione: La prima relazione fornisce $x = 15+17N$, la seconda $x = -5+23M$ (con N e M interi) per cui si ottiene $23M = 20 + 17N$ ovvero $M \bmod 17 = 20/23 \bmod 17 = 9$ cioè $M = 9 + 17k$ e, sostituendo, $x = 202 + 391k$ (con k intero).

4. **Risolvere, in campo complesso, l'equazione $x^4 + 12ix^2 + 64 = 0$ (6 punti)**

Soluzione: basta porre $x^2 = y$ e si trova $y^2 + 12iy + 64 = 0$ le cui soluzioni sono: $\{y = 4i\}, \{y = -16i\}$. Quindi i valori di x sono le radici quadrate di $4i$ e di $-16i$. Ovvero le **quattro** soluzioni sono:

$$\left\{x = \sqrt{2} + i\sqrt{2}\right\}, \left\{x = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right\}, \left\{x = 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}\right\}, \left\{x = -2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}\right\}$$

5. **Calcolare, in forma trigonometrica, le radici terze di $(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$ (4 punti)**

Soluzione: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} = e^{i\pi/3}$ per cui le radici terze sono:

$$-\cos\frac{1}{9}\pi - i\sin\frac{1}{9}\pi, -\cos\frac{2}{9}\pi + i\sin\frac{2}{9}\pi, \cos\frac{1}{9}\pi + i\sin\frac{1}{9}\pi$$

6. **Sia u_n una successione di numeri complessi; trovare la parte reale di u_4 sapendo che: (4 punti)**

$$u_{n+2} - 2u_{n+1} + 5u_n = 0$$
$$u_0 = 0$$
$$u_1 = 4$$

Soluzione: l'equazione di secondo grado associata è $x^2 - 2x + 5 = 0$, con soluzioni complesse coniugate:

$$\{\alpha = 1 - 2i\}, \{\beta = 1 + 2i\}$$

la soluzione generale è quindi: $u_n = A\alpha^n + B\beta^n$. Le costanti A e B si ottengono da:

$$\begin{gathered} u_0 = A + B = 0 \\ u_1 = A\alpha + B\beta = 4 \end{gathered}$$

Da cui: $A = i$ e $B = -i$. In definitiva:

$$u_n = i\,(1 - 2i)^n - i\,(1 + 2i)^n$$

da cui:

$$\operatorname{Re} u_4 = \operatorname{Re}(i\,(1 - 2i)^4 - i\,(1 + 2i)^4) = -48$$

7. **Sia n un intero, dimostrare che $n^{13} - n$ è sempre divisibile per 30 (6 punti).**

   Soluzione : si osservi prima di tutto che $30 = 2 \times 3 \times 5$ per cui si deve dimostrare che:

$$\begin{gathered} n^{13} - n = 0 \bmod 2 \text{ ovvia!(la differenza di due dispari o di due pari è pari)} \\ n^{13} - n = 0 \bmod 3 \\ n^{13} - n = 0 \bmod 5 \end{gathered}$$

La tesi segue immediatamente, infatti il teorema di Fermat dice che:

$$\begin{gathered} n^3 = n \bmod 3 \text{ cioè } n^{13} = n^3 n^3 n^3 n^3 n = (nnn)nn = (n^3)nn = nnn = n^3 = n \\ n^5 = n \bmod 5 \text{ cioè } n^{13} = n^5 n^5 n^3 = (nn)nnn = n^5 = n \end{gathered}$$