# Algebra (Informatica) — 16 settembre 2003

*Con più di 18 punti si può fare l'orale o accettare il voto dello scritto (30 e lode per chi risolve tutti gli esercizi); con meno di 17 punti si deve rifare lo scritto; con 17 o 18 punti si è ammessi all'orale.*

1. **Trovare il minimo intero positivo $x$ tale che: (5 punti)**

$$\textbf{a)}\ 27x = 17 \bmod 29$$
$$\textbf{b)}\ -13x = 21 \bmod 27$$

Soluzione: **a)** $x = 17/27 \bmod 29 = 6$ , **b)** $x = 21/(-13) \bmod 27 = 15$

2. **Trovare i valori dell'intero $a$ per i quali le seguenti equazioni hanno soluzioni intere:**

$$\textbf{a)}\ ax + 2ay = 2\ \textbf{(3 punti)}$$
$$\textbf{b)}\ 4ax + 2ay = a + 3\ \textbf{(3 punti)}$$

Soluzione: **a)** Il massimo comun divisore tra $a$ e $2a$ è $|a|$ ; $|a|$ divide 2 se e solo se $a = \pm 1, \pm 2$. **b)** Il massimo comun divisore tra $4a$ e $2a$ è $2|a|$ ; $2|a|$ divide $a+3$ se e solo se $a = \pm 1, \pm 3$.

3. **Trovare tutti i numeri interi $x$ che verificano la seguente coppia di congruenze: (4 punti)**

$$\begin{cases} x = 15 \bmod 27 \\ x = 5 \bmod 23 \end{cases}$$

Soluzione: La prima relazione fornisce $x = 15 + 27N$, la seconda $x = 5 + 23M$ (con $N$ e $M$ interi) per cui si ottiene $23M = 10 + 27N$ ovvero $M \bmod 27 = 10/23 \bmod 27 = 11$ cioè $M = 11 + 27k$ e, sostituendo, $x = 258 + 621k$ (con $k$ intero).

4. **Risolvere, in campo complesso, l'equazione** $x^4 + 25ix^2 + 4x^2 + 100i = 0$. **(5 punti)**

Soluzione: basta porre $x^2 = y$ e si trova $y^2 + 25iy + 4y + 100i = 0$, le cui soluzioni sono: $\{y = -4\}, \{y = 25i\}$ . Quindi i valori di $x$ sono le radici quadrate di $-4$ e di $25i$. Ovvero le **quattro** soluzioni sono:

$$\left\{x = \frac{5}{2}\sqrt{2} - \frac{5}{2}i\sqrt{2}\right\}, \left\{x = -\frac{5}{2}\sqrt{2} + \frac{5}{2}i\sqrt{2}\right\}, \{x = 2i\}, \{x = -2i\}$$

5. **Dimostrare per induzione che la somma dei primi $n$ numeri naturali *dispari* vale $n^2$** Esempio:

$$1 = 1^2, 1 + 3 = 2^2, 1 + 3 + 5 = 3^2, 1 + 3 + 5 + 7 = 4^2, ...$$

**(5 punti).**

Soluzione: siccome $1 = 1^2$ l'induzione può iniziare; l'ipotesi induttiva è:

$$\sum_{1}^{n-1}(2k-1) = (n-1)^2$$

osserviamo ora che:

$$\sum_{1}^{n}(2k-1) = \sum_{1}^{n-1}(2k-1) + (2n-1) = (n-1)^2 + (2n-1) = n^2$$

6. **Sia $n$ un intero positivo, dimostrare che $7^n + (-1)^n - 2$ è sempre divisibile per $4$ (6 punti).**

   Soluzione : si deve dimostrare che:

$$(7^n + (-1)^n - 2) \bmod 4 = 0$$

La tesi segue immediatamente, infatti basta osservare che $7^2 \bmod 4 = 1$ e quindi:

$$\begin{aligned} \textbf{per } n \textbf{ pari},\ & (7^n + (-1)^n - 2) \bmod 4 = \left(49^{n/2} + (-1)^n - 2\right) \bmod 4 = 1 + 1 - 2 = 0 \\ \textbf{per } n \textbf{ dispari},\ & (7^n + (-1)^n - 2) \bmod 4 = \left(7^{2k+1} + (-1)^{2k+1} - 2\right) \bmod 4 = \\ & = \left(49^k 7 + (-1)^{2k}(-1) - 2\right) \bmod 4 = 3 - 1 - 2 = 0 \end{aligned}$$