

## Complementi di Teoria delle Funzioni di Variabile Complessa.

*Roberto Catenacci e Diego Matessi.*

Versione del 8 Dicembre 2005

**Indice**

<b>1</b>	<b>La funzione esponenziale</b>	<b>2</b>
	L'esponenziale come serie di potenze . . . . .	2
	Proprietà geometriche dell'esponenziale . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Le mappe conformi</b>	<b>4</b>
	Basi orientate . . . . .	4
	Diffeomorfismi locali positivi . . . . .	4
	Mappe conformi e funzioni olomorfe . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Le trasformazioni di Möbius</b>	<b>6</b>
	Definizione . . . . .	6
	La struttura di gruppo di $\mathcal{M}$ . . . . .	7
	Trasformazioni elementari . . . . .	8
	Rette e cerchi . . . . .	9
	Tre punti . . . . .	9
	Un esempio . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Estensioni olomorfe <math>\bar{f}: \mathbb{C} \cup \infty \rightarrow \mathbb{C} \cup \infty</math></b>	<b>10</b>
	Caso $\bar{f}(\infty) \in \mathbb{C}$ . . . . .	11
	Caso $\bar{f}(p) = \infty$ . . . . .	12
	Caso $\bar{f}(\infty) = \infty$ . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Mappe olomorfe della sfera di Riemann</b>	<b>14</b>
	Esercizi per dimostrare la Proposizione 13 . . . . .	16
	Altri esercizi . . . . .	16
<b>6</b>	<b>Logaritmo, radici, superficie di Riemann</b>	<b>16</b>
	Il logaritmo complesso . . . . .	16
	La superficie di Riemann di $\log z$ . . . . .	18
	Le radici $q$ -esime . . . . .	19
	Logaritmi e radici di polinomi . . . . .	21

# 1 La funzione esponenziale

La funzione esponenziale  $f : z \mapsto e^z$  è l'unica funzione  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  che soddisfa le seguenti tre proprietà:

(i)  $f$  è analitica

(ii)  $f(z_1 + z_2) = f(z_1)f(z_2)$

(iii)  $f(x) = e^x$ , per ogni  $x \in \mathbb{R}$

Si ha che da queste proprietà segue che

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

## L'esponenziale come serie di potenze

Dimostriamo che la funzione esponenziale è sviluppabile in serie di potenze. Ci occorrerà la seguente

**Proposizione 1** Una funzione analitica  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  che soddisfa

$$\begin{cases} f'(z) = f(z) \\ f(0) = 1. \end{cases} \quad (1)$$

soddisfa anche la proprietà (ii).

**Dimostrazione.** Dalla (1) segue che per ogni  $c \in \mathbb{C}$  fissato

$$(f(z)f(c-z))' = f'(z)f(c-z) - f(z)f'(c-z) = 0$$

Quindi la funzione  $f(z)f(c-z)$  è costante, ovvero

$$f(z)f(c-z) = f(0)f(c) = f(c)$$

per tutti gli  $c$  e  $z$  in  $\mathbb{C}$ . Ponendo  $z = z_1$  e  $c = z_1 + z_2$  si ottiene che  $f$  soddisfa la proprietà (ii).  $\square$

**Esercizio.** Trovare almeno due funzioni analitiche che soddisfano la proprietà (ii) ma non (1).  $\square$

**Teorema 2** Si ha

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

per ogni  $z \in \mathbb{C}$ .

**Dimostrazione.** Sia  $f$  la serie di potenze

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Dai teoremi sulle serie di potenze sappiamo che  $f$  ha raggio di convergenza  $R = \infty$ , inoltre  $f$  è analitica. La derivata di  $f$  è la serie ottenuta dalla somma delle derivate di ciascun termine di  $f$ . Si verifica (esercizio!) che  $f$  soddisfa

$$f'(z) = f(z),$$

per ogni  $z \in \mathbb{C}$ . Inoltre vale  $f(0) = 1$ . Segue dunque dalla Proposizione 1 che  $f$  verifica la proprietà (ii). Poiché dal corso di analisi sappiamo che per  $f$  vale anche la (iii), concludiamo che  $f(z) = e^z$ .  $\square$

## Proprietà geometriche dell'esponenziale

Studiamo la funzione esponenziale come “mappa” del piano complesso in sé stesso.

Cerchiamo di capire dove  $e^z$  manda alcune curve speciali del piano, (cfr. anche la Figura 1). Sia ad esempio  $V$  una retta verticale di equazione

$$V = \{x + iy \mid x = x_0\},$$

per un  $x_0 \in \mathbb{R}$  fissato. Allora l'immagine di  $V$  rispetto a  $e^z$  è l'insieme

$$e^V = \{e^{x_0}(\cos y + i \sin y), y \in \mathbb{R}\},$$

ovvero il cerchio di centro l'origine e raggio  $e^{x_0}$ .

Notiamo che  $e^z$  non manda la retta  $V$  nel cerchio  $e^V$  in maniera iniettiva. Infatti dato un punto  $p \in e^V$ , la preimmagine di  $p$  rispetto a  $e^z$  è un insieme infinito di punti che differiscono fra loro per multipli di  $2\pi i$ . Si dice anche che  $e : V \rightarrow e^V$  è la mappa rivestimento del cerchio  $e^V$ , nel senso imparato nel corso di topologia. Sia ora  $H$  la retta orizzontale

$$H = \{x + iy \mid y = y_0\},$$

per un  $y_0 \in \mathbb{R}$  fissato. L'immagine di  $H$  rispetto a  $e^z$  è dunque

$$e^H = \{e^x(\cos y_0 + i \sin y_0), x \in \mathbb{R}\}$$

ovvero una semiretta che parte da 0 e passa per il punto sul cerchio unitario  $e^{iy_0} = \cos y_0 + i \sin y_0$ . Notiamo che  $0 \notin e^H$ , dunque  $e^H$  è una semiretta aperta.

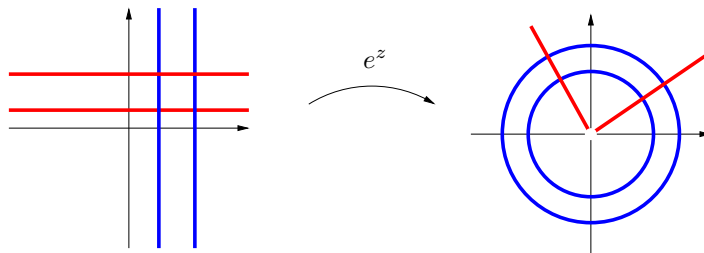


Figura 1: La funzione esponenziale manda rette verticali in cerchi e rette orizzontali in semirette che partono dall'origine

Studiamo ora il comportamento di  $e^z$  ristretta ad alcune regione particolari. Dati  $\alpha > 0$  e  $y_0$  due numeri reali, sia  $S_\alpha = \{x + iy \mid y_0 < y < y_0 + \alpha\}$  una striscia orizzontale. Nel caso in cui  $\alpha \in (0, 2\pi)$ ,  $e^z$  manda  $S_\alpha$  biiettivamente nel settore angolare con vertice nell'origine e angolo  $\alpha$  dato da  $T_\alpha = \{\rho(\cos y + i \sin y) \mid \rho > 0, y_0 < y < y_0 + \alpha\}$ , (cfr. Figura 2). Si potrebbe quasi dire che  $e^z$  apre la striscia come un ventaglio.

Nel caso in cui  $\alpha > 2\pi$ ,  $e^z$  ristretta a  $S_\alpha$  non è più iniettiva. L'immagine di  $S_\alpha$  è in questo caso  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ . La Figura 3 illustra come le due strisce date da  $2\pi < y < \alpha$  e da  $0 < y < \alpha - 2\pi$  si sovrappongono allo stesso settore angolare.

Un altro aspetto che conviene notare della funzione esponenziale è il suo comportamento “selvaggio” all'infinito. Ovvero  $e^z$  soddisfa la seguente proprietà: dato un qualsiasi  $l \in \mathbb{C}$ , esiste una successione complessa  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , che tende all'infinito (i.e.  $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \infty$ ), e tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{z_n} = l. \quad (2)$$

Se  $l = 0$  basta prendere  $z_n = -n$ . Se  $l \neq 0$ , allora esiste  $z_0$  tale che  $e^{z_0} = l$ , infatti, come già notato,  $e^z$  è suriettiva su  $\mathbb{C}^*$ . Ora definiamo  $z_n = z_0 + 2n\pi i$ . Chiaramente  $z_n$  tende all'infinito, inoltre  $e^{z_n} = l$  per tutti gli  $n$ , quindi vale certamente la (2). Una conseguenza importante è che la funzione esponenziale non può essere estesa in maniera continua ad una funzione sulla sfera di Riemann  $\mathbb{C} \cup \infty$ .

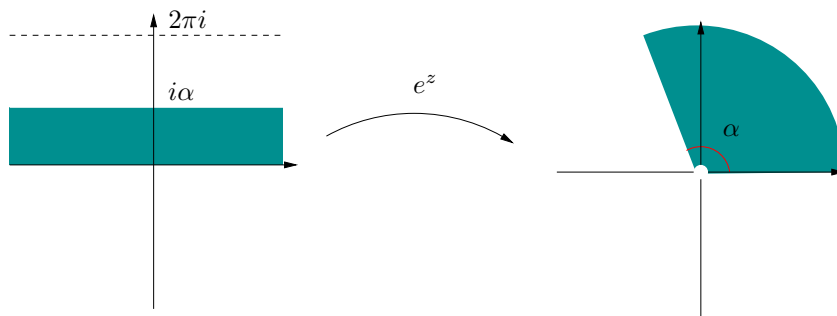


Figura 2: La funzione esponenziale manda strisce orizzontali di larghezza  $\alpha$  in settori angolari con angolo  $\alpha$

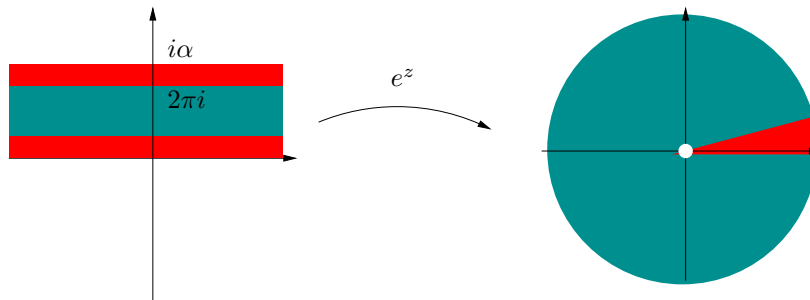


Figura 3: Quando  $\alpha > 2\pi$ ,  $e^z$  ristretta ad una striscia orizzontale di larghezza  $\alpha$  non è più iniettiva. Le due strisce orizzontali rosse si sovrappongono al settore angolare rosso.

## 2 Le mappe conformi

### Basi orientate

Sia  $V$  uno spazio vettoriale reale di dimensione finita  $n$  e siano  $e = \{e_1, \dots, e_n\}$  ed  $f = \{f_1, \dots, f_n\}$  due basi di  $V$ . Diciamo che  $e$  ed  $f$  hanno la stessa **orientazione** se la matrice  $A$  di cambiamento di base da  $e$  ad  $f$  soddisfa

$$\det A > 0.$$

Ad esempio, in  $\mathbb{R}^2$ , se  $e = \{(1, 0), (0, 1)\}$  e  $f = \{(1, 0), (0, -1)\}$ , le due basi non hanno la stessa orientazione. Se provate a disegnarle su un foglio e a guardarle dall'alto vedrete che ad una potete sovrapporre pollice ed indice della mano sinistra e all'altra pollice ed indice della mano destra. In  $\mathbb{R}^n$  abbiamo la base canonica. Diciamo, per convenzione, che la base canonica ha orientazione positiva, quindi una base qualsiasi è **orientata positivamente** se ha la stessa orientazione della base canonica, altrimenti si dice che è **orientata negativamente**. In  $\mathbb{C}$ , visto come spazio vettoriale reale, la base canonica è  $e = \{1, i\}$ .

### Diffeomorfismi locali positivi

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un aperto e  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  una mappa  $C^\infty$ . Denotiamo con  $D\phi_x$  la matrice Jacobiana di  $\phi$  calcolata in  $x \in \Omega$ . Quindi per ogni  $x \in \Omega$ ,  $D\phi_x$  è una trasformazione lineare  $D\phi_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Diciamo che  $\phi$  è un **diffeomorfismo locale** se per ogni  $x \in \Omega$

$$\det D\phi_x \neq 0.$$

Diciamo inoltre che un diffeomorfismo locale è **positivo** (oppure che **conserva l'orientazione**) se per ogni  $x \in \Omega$  si ha

$$\det D\phi_x > 0.$$

Questa condizione implica che  $D\phi_x$ , come trasformazione lineare, manda basi orientate positivamente in basi orientate positivamente. In particolare, per il teorema della funzione inversa, un diffeomorfismo locale è localmente invertibile con inversa  $C^\infty$ .

**Esempio.** Sia  $\phi : (x, y) \mapsto (x, y^2)$ . La matrice Jacobiana di  $\phi$  è

$$D\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}$$

e  $\det D\phi = 2y$ . Quindi  $\phi$  è un diffeomorfismo locale quando  $y \neq 0$  ed è positivo se  $y > 0$ . Intuitivamente  $\phi$  piega il piano in due come un foglio. La piega corrisponde alla retta  $y = 0$ . Per veder questo, disegnate in  $\mathbb{R}^3$  l'immagine della funzione  $(x, y) \mapsto (x, y, y^2)$ . La mappa  $\phi$  si ottiene proiettando questa immagine sul piano  $xz$ . Intuitivamente, un diffeomorfismo che non conserva l'orientazione corrisponde a "girare il foglio dall'altra parte".  $\square$

## Mappe conformi e funzioni olomorfe

Una mappa  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  si dice **conforme** se soddisfa le seguenti proprietà:

- (i)  $\phi$  è un diffeomorfismo locale positivo;
- (ii)  $\phi$  conserva gli angoli, ovvero per qualsiasi  $x \in \Omega$  e ogni coppia di vettori  $v_1$  e  $v_2$ , l'angolo formato da  $D\phi_x v_1$  e  $D\phi_x v_2$  è uguale a quello formato da  $v_1$  e  $v_2$ .

Le due proprietà sono illustrate in Figura 4. Due curve,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , si intersecano in  $z$  e hanno come tangenti in  $z$  i vettori  $v_1$  e  $v_2$  che formano un angolo  $\alpha$  e costituiscono una base positivamente orientata (le tangenti si intendono orientate nel senso di percorrenza della curva). Le curve immagine rispetto a  $\phi$ ,  $\phi \circ \gamma_1$  e  $\phi \circ \gamma_2$ , si intersecano in  $\phi(z)$  e hanno come tangenti  $\tilde{v}_1$  e  $\tilde{v}_2$ . Se  $\phi$  è conforme, anche  $\tilde{v}_1$  e  $\tilde{v}_2$  formano un angolo  $\alpha$  e costituiscono una base positivamente orientata.

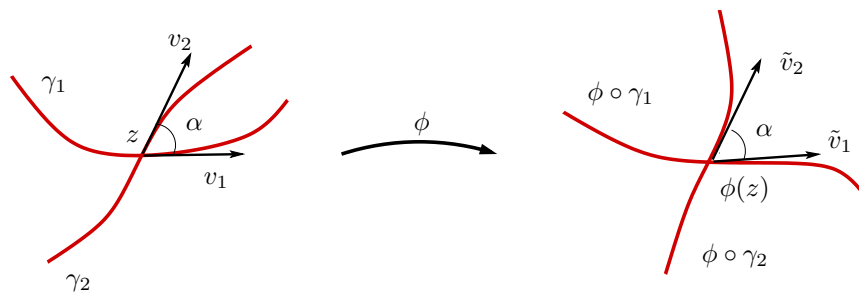


Figura 4: Una mappa conforme

**Esercizio.** Trovare un diffeomorfismo locale positivo che non conserva gli angoli.  $\square$

Trovare esempi di mappe conformi sarà molto facile dopo il seguente

**Teorema 3** Una funzione olomorfa  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  tale che  $f'(z) \neq 0$  per ogni  $z \in \Omega$  è conforme.

**Dimostrazione.** Che  $f$  sia un diffeomorfismo locale positivo se  $f' \neq 0$  segue dal fatto che per una funzione olomorfa vale sempre

$$\det Df_z = |f'(z)|^2. \quad (3)$$

Dimostriamo questa uguaglianza. Sia  $f = u + iv$ , allora

$$Df = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix}$$

Applicando le equazioni di Cauchy-Riemann possiamo sostituire  $-\partial_x v$  al posto di  $\partial_y u$  e  $\partial_x u$  al posto di  $\partial_y v$ . Calcolando poi il determinante si ha

$$\det Df = (\partial_x u)^2 + (\partial_x v)^2$$

Che è la (3), poichè  $\partial_x u + i\partial_x v = f'$ . Dimostriamo ora che  $f$  conserva gli angoli. Sia  $\gamma : (-1, 1) \rightarrow \Omega$  una curva tale che  $\gamma(0) = z$  e sia  $v = \dot{\gamma}(0)$  il vettore tangente a  $\gamma$  in  $z$ . Assumiamo che  $v \neq 0$ . Se  $\tilde{v}$  è il vettore tangente alla curva immagine  $f \circ \gamma$  in  $f(z)$ , si calcola che

$$\tilde{v} = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))|_{t=0} = f'(z) \cdot v, \quad (4)$$

dove nell'ultima espressione  $\cdot$  denota la moltiplicazione complessa. L'ultima uguaglianza si può dimostrare calcolando, prima la derivata rispetto a  $t$  di  $f \circ \gamma$  scrivendo  $f = u + iv$  e utilizzando le regole di derivazione solite, poi applicando le equazioni di Cauchy-Riemann. Interpretiamo la (4). Per ipotesi  $f'(z) \neq 0$ , quindi possiamo scrivere  $f'(z)$  in coordinate angolari, ovvero

$$f'(z) = R(z)e^{i\phi(z)}.$$

Analogamente si ha  $v = \rho e^{i\theta}$ , quindi

$$\tilde{v} = R(z)\rho e^{i(\theta+\phi(z))},$$

ovvero  $\tilde{v}$  si ottiene allungando (o accorciando)  $v$  di un fattore  $R(z)$  e poi ruotandolo di un angolo  $\phi(z)$ . L'osservazione chiave è che l'angolo  $\phi(z)$  dipende esclusivamente da  $z$  e non dalla curva  $\gamma$  passante per  $z$ . Quindi date due curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , passanti per  $z$  con tangenti i vettori  $v_1$  e  $v_2$  rispettivamente, i corrispondenti vettori tangenti alle curve immagine  $\tilde{v}_1$  e  $\tilde{v}_2$  differiscono da  $v_1$  e  $v_2$  di uno stesso angolo  $\phi(z)$ . Ne segue che se  $v_1$  e  $v_2$  formano un angolo  $\alpha$  fra loro,  $\tilde{v}_1$  e  $\tilde{v}_2$  formano lo stesso angolo.  $\square$

**Esempio.** Si consideri la funzione esponenziale  $f(z) = e^z$ . Si ha  $f'(z) = e^z \neq 0$ , quindi  $f$  è conforme. Una manifestazione di questo è illustrata in Figura 1, dove rette verticali e orizzontali, che tra loro formano angoli retti, vengono mandate in curve che fra loro formano angoli retti.  $\square$

**Esempio.** La funzione  $f : z \mapsto z^2$  è conforme eccetto che nel punto  $z = 0$ .  $\square$

**Esercizio.** Data  $f : z \mapsto z^2$ , studiare dove  $f$  manda rette verticali e orizzontali. Verificare che le immagini di rette verticali e rette orizzontali formano tra loro angoli retti (eccetto un caso, quale?). Cosa succede agli assi coordinati?  $\square$

### 3 Le trasformazioni di Möbius

#### Definizione

Studiamo ora una importante classe di mappe conformi, le cosiddette trasformazioni di Möbius. Sia  $T$  una funzione del tipo

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (5)$$

dove  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  e  $c, d$  non sono entrambi nulli. Se  $c \neq 0$ ,  $T$ , è definita e olomorfa in  $\mathbb{C} - \{-d/c\}$  mentre se  $c = 0$ ,  $T$  è definita e olomorfa su tutto  $\mathbb{C}$ . Si ha la seguente

**Proposizione 4** *La mappa  $T$  è invertibile se e solo se  $ad - bc \neq 0$ . Inoltre se  $ad - bc = 0$ ,  $T$  è costante.*

**Dimostrazione.** Supponiamo  $ad - bc \neq 0$  e sia

$$S(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}. \quad (6)$$

Chiaramente  $S$  è ben definita perchè  $c$  ed  $a$  non possono essere entrambi nulli. Se  $c = 0$  sia  $T$  che  $S$  sono definite su  $\mathbb{C}$  e si verifica che  $S \circ T(z) = T \circ S(z) = z$ , ovvero che  $S$  è l'inversa di  $T$ . Se  $c \neq 0$ ,  $S$  è ben definita su  $\mathbb{C} - \{a/c\}$ . Sia quindi  $z \neq a/c$ , si calcola che

$$cS(z) + d = \frac{ad - cb}{-cz + a} \neq 0,$$

ovvero che  $T$  è definita in  $S(z)$ . Si può quindi calcolare che

$$T(S(z)) = z,$$

per ogni  $z \in \mathbb{C} - \{a/c\}$ . Viceversa si dimostra analogamente che per ogni  $z \in \mathbb{C} - \{-d/c\}$ ,  $T(z) \in \mathbb{C} - \{a/c\}$  e che  $S(T(z)) = z$ . Questo dimostra che se  $ad - bc \neq 0$  e  $c \neq 0$  allora  $T : \mathbb{C} - \{-d/c\} \rightarrow \mathbb{C} - \{a/c\}$  è una mappa biiettiva, la cui inversa è  $S$ .

Sia ora  $ad - bc = 0$ . Se  $d = 0$  allora anche  $b = 0$  (poichè abbiamo già escluso che anche  $c$  possa essere nullo). Si ricava quindi che  $T(z) = a/c$  per ogni  $z \in \mathbb{C}$ . Se  $d \neq 0$  allora si ha  $a = bc/d$ . Sostituendo questo valore nella definizione di  $T$  si ottiene che per ogni  $z \neq -d/c$ ,  $T(z) = b/d$ . Questo conclude la dimostrazione.  $\square$

Sia  $\Sigma = \mathbb{C} \cup \infty$  la sfera di Riemann. Ogni trasformazione  $T$  del tipo (5), con  $ad - cb \neq 0$  può essere interpretata come una mappa continua  $T : \Sigma \rightarrow \Sigma$ . Infatti se  $c \neq 0$  si ha

$$\lim_{z \rightarrow -d/c} T(z) = \infty.$$

Quindi possiamo definire:

$$T(-d/c) = \infty.$$

Notiamo poi che

$$\lim_{z \rightarrow \infty} T(z) = \begin{cases} \infty & \text{se } c = 0, \\ a/c & \text{se } c \neq 0. \end{cases}$$

Perciò possiamo definire

$$T(\infty) = \begin{cases} \infty & \text{se } c = 0, \\ a/c & \text{se } c \neq 0. \end{cases}$$

Osserviamo anche che ogni  $T$  di questo tipo definisce un omeomorfismo della sfera  $\Sigma$ , infatti  $T$  è certamente continua e la sua inversa è  $T^{-1} = S$ , dove  $S$  è definita in (6), e quindi continua.

**Definizione 5** *L'insieme*

$$\mathcal{M} = \left\{ T : \Sigma \rightarrow \Sigma \mid T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0 \right\}$$

è chiamato l'insieme delle **trasformazioni di Möbius** di  $\Sigma$ .

## La struttura di gruppo di $\mathcal{M}$

Si verifica facilmente che  $\mathcal{M}$  è un gruppo. Infatti abbiamo già visto che ogni  $T \in \mathcal{M}$  ammette un'inversa e che questa è un elemento di  $\mathcal{M}$ . Si verifica facilmente anche che dati due elementi di  $\mathcal{M}$ ,  $T_1$  e  $T_2$ , la loro

composizione  $T_1 \circ T_2$  è ancora un elemento di  $\mathcal{M}$ . Possiamo dare una descrizione più precisa e utile di  $\mathcal{M}$ . Consideriamo il gruppo

$$\mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc \neq 0 \right\}$$

delle trasformazioni lineari invertibili di  $\mathbb{C}^2$  con la moltiplicazione riga per colonna delle matrici. Possiamo identificare il gruppo moltiplicativo del campo complesso  $\mathbb{C}^*$  con un sottogruppo di  $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$  mediante

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* &\rightarrow \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \\ \lambda &\mapsto \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Abbiamo il seguente

**Proposizione 6** *Il gruppo  $\mathcal{M}$  è isomorfo al gruppo*

$$\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})/\mathbb{C}^*.$$

**Dimostrazione.** Consideriamo la mappa  $\Theta : \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}$  data da

$$\Theta : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto T(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Chiaramente  $\Theta$  è suriettiva. Si verifica facilmente (esercizio!) che  $\Theta$  è anche un omomorfismo di gruppi, ovvero che date  $M$  e  $N$  in  $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$

$$\Theta(M \cdot N) = \Theta(M) \circ \Theta(N).$$

Si verifica anche che  $\Theta(M)(z) = z$  per ogni  $z \in \Sigma$  se e solo se  $M \in \mathbb{C}^*$ , ovvero se e solo se  $M = \lambda \mathrm{Id}$  per un  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ . Si ha quindi

$$\ker \Theta = \mathbb{C}^*.$$

Dal teorema dell'omomorfismo in teoria dei gruppi segue che  $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})/\mathbb{C}^*$  è isomorfo a  $\mathcal{M}$ . □

Il gruppo  $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})/\mathbb{C}^*$  è molto importante, infatti ha anche un nome. Si chiama il **gruppo lineare proiettivo** e viene spesso denotato con  $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ .

### Trasformazioni elementari

Ci sono degli elementi in  $\mathcal{M}$  che sono particolarmente semplici. Ad esempio

$$T(z) = \frac{1}{z}.$$

Chiamiamo questa trasformazione **inversione**. Un'altro tipo piuttosto semplice sono le **traslazioni**, ovvero mappe del tipo

$$T(z) = z + b.$$

Ci sono infine le cosiddette **omotetie**, ovvero le trasformazioni

$$T(z) = az.$$

Le inversioni, omotetie e traslazioni sono chiamate trasformazioni di Möbius elementari. E' chiaro che le trasformazioni  $T$  in cui  $c = 0$  sono ottenute mediante composizioni di traslazioni e omotetie. Ma si verifica anche che, se  $c \neq 0$ , allora

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} - \frac{\frac{ad-bc}{c^2}}{z + \frac{d}{c}}$$

Ovvero che ogni trasformazione di Möbius è la composizione di un numero finito di trasformazioni elementari. Detto in altro modo il gruppo  $\mathcal{M}$  è generato dalle trasformazioni elementari.



## Rette e cerchi

Cominciamo lo studio delle proprietà geometriche delle trasformazioni di Möbius. Innanzitutto notiamo che data  $T \in \mathcal{M}$ , per ogni  $z \in \mathbb{C} - \{-d/c\}$  (o in  $\mathbb{C}$  se  $c = 0$ ) si ha

$$T'(z) = \frac{ad - cb}{(cz + d)^2} \neq 0. \quad (7)$$

Quindi le trasformazioni di Möbius sono conformi. Ora dimostriamo il seguente

**Teorema 7** *Sia  $T \in \mathcal{M}$ . Data una retta  $R \subset \mathbb{C}$ , allora si ha che  $T(R \cup \infty)$  è una retta oppure un cerchio. Viceversa se  $C \subset \mathbb{C}$  è un cerchio, allora  $T(C)$  è un cerchio oppure  $T(C) = R \cup \infty$ , dove  $R \subset \mathbb{C}$  è una retta.*

**Dimostrazione.** È chiaro che è sufficiente verificare il teorema nel caso in cui  $T$  sia una trasformazione elementare. Nel caso in cui  $T$  sia una omotetia oppure una traslazione, il teorema è di facile verifica e lo lasciamo per esercizio. Rimane da considerare solo il caso in cui  $T$  sia un'inversione. Consideriamo prima il caso di un cerchio  $C$ . Sia  $q \in \mathbb{C}$  il centro di  $C$  e  $r > 0$  il raggio, ovvero

$$C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - q|^2 = r^2\}.$$

Si ha

$$T(C) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left| \frac{1}{z} - q \right|^2 = r^2 \right\}$$

Nel caso in cui  $q = 0$  si verifica facilmente che  $T(C)$  è il cerchio di centro l'origine e raggio  $1/r$ . Sia  $q \neq 0$  e consideriamo due casi: il caso in cui  $r^2 = |q|^2$ , ovvero il cerchio passa per l'origine, e il caso  $r^2 \neq |q|^2$ .

Nel primo caso, dopo qualche manipolazione algebrica, si ricava che

$$T(C) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left| z - \frac{1}{q} \right|^2 = |z|^2 \right\}$$

E questa è l'equazione del luogo dei punti equidistanti da  $1/q$  e dall'origine. Sappiamo bene che questa è la retta ortogonale al segmento congiungente 0 e  $1/q$  e passante per il suo punto intermedio. Intuitivamente quello che accade è che il cerchio passa proprio per il punto che viene mandato all'  $\infty$  da  $T$ , quindi il cerchio viene "spezzato" da  $T$  proprio in quel punto.

Sia ora  $r^2 \neq |q|^2$ . Si definiscano  $p = 1/q$  e  $k = (r/|q|)^2$ . Dopo qualche semplice manipolazione algebrica (che lasciamo per esercizio) si verifica che

$$T(C) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left| z - \frac{p}{1-k} \right|^2 = \frac{k|p|^2}{(1-k)^2} \right\},$$

che è chiaramente l'equazione di un cerchio.

Supponiamo ora che  $R$  sia una retta. Ci sono due casi:  $\mathbb{R}$  passa per l'origine oppure no. Se passa per l'origine si verifica facilmente che  $T(R \cup \infty)$  è una retta passante per l'origine. Se  $\mathbb{R}$  non passa per l'origine, certamente esistono un punto  $p \in \mathbb{C}^*$  tale che  $R$  è ortogonale al segmento congiungente  $p$  e 0 e passa per il suo punto medio (esercizio!). Se  $q = 1/p$ , e  $C$  è il cerchio di centro  $q$  e raggio  $r = |q|$ , abbiamo già visto che  $T(C) = R \cup \infty$ , e quindi  $T(R \cup \infty) = C$ , poichè  $T^{-1} = T$ .  $\square$

## Tre punti

Sulla sfera di Riemann ci sono tre punti speciali: 0, 1 e  $\infty$ . Dati tre punti distinti  $z_1, z_2, z_3 \in \Sigma$ , si ha che esiste una e una sola trasformazione  $T \in \mathcal{M}$  tale che  $T(z_1) = 0$ ,  $T(z_2) = 1$  e  $T(z_3) = \infty$ . In fatti se  $z_1, z_2, z_3$  sono in  $\mathbb{C}$  si verifica che questo è ottenuto dalla trasformazione

$$T(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}.$$

Lasciamo per esercizio di trovare una trasformazione che raggiunga lo scopo nel caso in cui uno dei tre punti sia  $\infty$ . Anche il fatto che la  $T$  data sia l'unica tale trasformazione (avendo fissati  $z_1, z_2$  e  $z_3$ ) viene lasciato per esercizio.

Si ha immediatamente una conseguenza importante. Date due triple di punti distinti di  $\Sigma$ ,  $(z_1, z_2, z_3)$  e  $(w_1, w_2, w_3)$ , esiste una trasformazione di Möbius  $T$  tale che  $Tz_j = w_j$ , per  $j = 1, 2, 3$ . Infatti, per quanto detto, esistono  $S$  e  $S'$  che mandano rispettivamente le triple  $(z_1, z_2, z_3)$  e  $(w_1, w_2, w_3)$  nella tripla  $(0, 1, \infty)$ . Basta quindi definire  $T = (S')^{-1}S$ . Si ha che questa  $T$  è l'unica tale trasformazione.

## Un esempio

Studiamo dettagliatamente l'esempio

$$T(z) = \frac{z}{z-1}.$$

Osserviamo innanzi tutto che  $T(0) = 0$ ,  $T(1) = \infty$  e che  $T(\infty) = 1$ . Cerchiamo di studiare dove  $T$  manda cerchi con centro l'origine e rette passanti per l'origine. Ovvero cerchiamo di capire l'immagine rispetto a  $T$  della Figura 5.

Sia  $C_r$  il cerchio di centro l'origine e raggio  $r$ . Nel caso in cui  $r = 1$ , ovvero quando  $C_r$  passa per 1 (cerchio verde in Figura 5),  $T(C_1)$  è la retta  $R$  passante per  $1/2$  e ortogonale all'asse reale (esercizio!). Quando  $r \neq 1$ , si calcola (esercizio!) che

$$T(C_r) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left| z - \frac{r^2}{r^2-1} \right|^2 = \frac{r^2}{(r^2-1)^2} \right\}.$$

Al variare di  $r$ , questa è una famiglia interessante di cerchi. Osserviamo che, se  $0 < r < 1$ , il centro di  $T(C_r)$  è un numero reale negativo (quindi  $T(C_r)$  sta alla sinistra di  $R$ ), che al tendere di  $r$  ad 1 si sposta verso  $-\infty$  sull'asse reale. Anche il raggio di  $T(C_r)$  tende a  $+\infty$  al tendere di  $r$  ad 1. Si può anche verificare che delle due intersezioni di  $T(C_r)$  con l'asse reale, quella più a destra tende a  $1/2$  al tendere di  $r$  ad 1. La famiglia di cerchi  $T(C_r)$  con  $r > 1$  sta tutta alla destra della retta  $R$  ed è simmetrica, rispetto a  $R$ , alla famiglia con  $0 < r < 1$ . In Figura 6, i cerchi blu e rossi sono rappresentanti di queste due famiglie. I cerchi blu in Figura 6 sono l'immagine dei cerchi blu in Figura 5 ( $0 < r < 1$ ) e quelli rossi sono l'immagine di quelli rossi ( $r > 1$ ). La retta verde in Figura 6 è l'immagine del cerchio verde passante per 1.

Studiamo ora cosa accade alle rette passanti per l'origine. Sia  $R_\alpha$  una tale retta, che forma un'angolo  $\alpha$  con l'asse reale. Possiamo assumere  $\alpha \in [0, \pi)$ . Innanzitutto osserviamo che se  $\alpha = 0$ , allora  $T(R_0 \cup \infty) = R_0 \cup \infty$ . Ovvero la retta reale viene mandata in sé stessa. Supponiamo ora  $\alpha \neq 0$ . Sappiamo che  $T(R_\alpha \cup \infty)$  sarà un cerchio o una retta. Questo cerchio o retta dovrà contenere sia il punto 0 che il punto 1, infatti  $T(0) = 0$  e  $T(\infty) = 1$ . Sappiamo inoltre che  $T$  è conforme, quindi  $T(R_\alpha \cup \infty)$  sarà un cerchio o una retta che contiene 0 e 1 e che forma un'angolo  $\alpha \neq 0$  con la retta reale. L'unica possibilità è che  $T(R_\alpha \cup \infty)$  sia un cerchio. Non solo, ma poichè esiste un solo cerchio che passa per 0 e per 1 e che forma un angolo  $\alpha$  con l'asse reale, ne segue che  $T(R_\alpha \cup \infty)$  può essere solo questo cerchio. In Figura 6 sono rappresentati in nero i cerchi immagine delle rette nere in Figura 5.

**Esercizio.** Usando la geometria elementare si calcolino il centro e il raggio del cerchio  $T(R_\alpha \cup \infty)$ , quando  $\alpha \neq 0$ .  $\square$

La configurazione di cerchi in Figura 6 prende il nome di cerchi di Steiner.

## 4 Estensioni olomorfe $\bar{f} : \mathbb{C} \cup \infty \rightarrow \mathbb{C} \cup \infty$

In questa sezione vedremo come in alcuni casi possiamo dare un senso al concetto di mappa olomorfa della sfera di Riemann in sé. L'idea è che in certi casi una funzione  $f$ , definita su una regione  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , può essere estesa al punto  $\infty$ , sia che  $\infty$  sia nel dominio, sia che sia nel codominio. Inoltre possiamo anche dire se questa estensione è olomorfa.

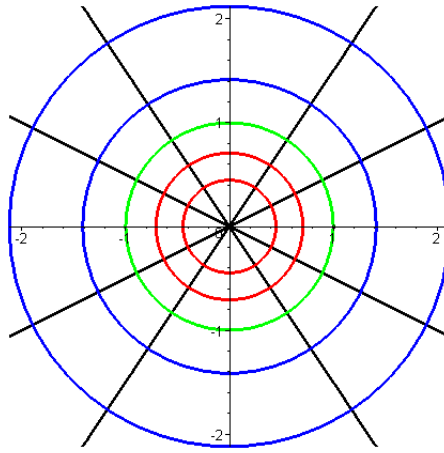


Figura 5: Cerchi con centro l'origine e rette passanti per l'origine. Il cerchio verde è quello passante per il punto 1. I cerchi blu hanno raggio  $r > 1$  e quelli rossi hanno raggio  $0 < r < 1$ .

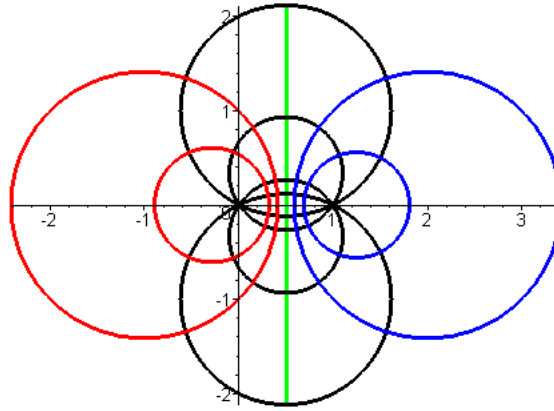


Figura 6: Questa è l'immagine della Figura 5 rispetto alla trasformazione di Möbius  $T(z) = \frac{z}{z-1}$ . Cerchi in questa configurazione vengono anche chiamati cerchi di Steiner.

L'osservazione chiave è che la mappa  $z \rightarrow 1/z$  ha la proprietà di essere olomorfa e di portare intorni di  $\infty$  in intorni di 0. Per esempio porta la regione esterna a un cerchio di centro l'origine nella regione interna di un'altro cerchio di centro l'origine. Useremo questa funzione per studiare le mappe all'  $\infty$ . Distingueremo tre casi.

### Caso $\bar{f}(\infty) \in \mathbb{C}$

Sia  $K \subset \mathbb{C}$  un sottoinsieme compatto e sia  $f : \mathbb{C} - K \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione. Assumiamo che  $f$  abbia limite finito all'  $\infty$ , ovvero che esiste  $l \in \mathbb{C}$  tale che

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = l.$$

Diamo la seguente

**Definizione 8** L'estensione  $\bar{f} : (\mathbb{C} - K) \cup \infty \rightarrow \mathbb{C}$  di  $f$  è la funzione tale che  $\bar{f}(z) = f(z)$  se  $z \in \mathbb{C} - K$  e  $\bar{f}(\infty) = l$ . Diciamo che  $\bar{f}$  è olomorfa all'  $\infty$  se la funzione

$$g(w) = \begin{cases} f(1/w) & \text{se } w \neq 0 \text{ e } 1/w \in \mathbb{C} - K, \\ l & \text{se } w = 0, \end{cases}$$

è olomorfa in un intorno di 0.

Mostriamo qualche esempio.

**Esempio.** Sia

$$f(z) = \frac{z^2}{z^2 + 2},$$

per ogni  $z \in \mathbb{C} - \{i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}\}$ . Si ha che

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 1.$$

Possiamo quindi definire  $\bar{f} : (\mathbb{C} - \{i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}\}) \cup \infty \rightarrow \mathbb{C}$  come nella Definizione 8. Si verifica inoltre che la funzione  $g$  è data da

$$g(w) = \begin{cases} \frac{1}{1+2w^2} & \text{se } w \neq 0, i/\sqrt{2}, -i/\sqrt{2} \\ 1 & \text{se } w = 0. \end{cases}$$

E' evidente che  $g$  è olomorfa in 0.

Sia ora  $f(z) = e^z$ . Abbiamo già visto che questa funzione non può essere estesa all'  $\infty$ . □

**Caso  $\bar{f}(p) = \infty$**

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  un aperto e  $p \in \Omega$ . Supponiamo che  $f : \Omega - \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$  sia una funzione tale che  $f(z) \neq 0$  per ogni  $z \in \Omega - \{p\}$  e che soddisfi

$$\lim_{z \rightarrow p} |f(z)| = \infty.$$

Diamo la seguente

**Definizione 9** L'estensione  $\bar{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \cup \infty$  di  $f$  è la funzione tale che  $\bar{f}(z) = f(z)$  se  $z \in \Omega - \{p\}$  e  $\bar{f}(p) = \infty$ . Diciamo che  $\bar{f}$  è olomorfa in  $p$  se la funzione

$$g(w) = \begin{cases} 1/f(w) & \text{se } w \in \Omega - \{p\}, \\ 0 & \text{se } w = p, \end{cases}$$

è olomorfa in un intorno di  $p$ .

Qui occorre fare un po' di attenzione. Infatti sarebbe sbagliato dire che  $f$  è olomorfa in  $p$ , poichè  $f$  non soddisfa la definizione di funzione olomorfa in  $p$ . Quella che è olomorfa è l'estensione  $\bar{f}$ , definita ponendo  $\bar{f}(p) = \infty$ . Vedremo che le funzioni di questo tipo la cui estensione è olomorfa verranno anche chiamate meromorfe.

**Esempio.** Sia

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1},$$

che è definita su  $\mathbb{C} - \{i, -i\}$ . Si ha

$$\lim_{z \rightarrow \pm i} |f(z)| = \infty.$$

Possiamo quindi definire l'estensione  $\bar{f}$  ponendo  $\bar{f}(\pm i) = \infty$ . Vediamo se  $\bar{f}$  è olomorfa in  $\pm i$ . Calcoliamo  $g$ :

$$g(w) = \begin{cases} w^2 + 1 & \text{se } w \in \mathbb{C} - \{i, -i\}, \\ 0 & \text{se } w = \pm i. \end{cases}$$

Chiaramente  $g$  è olomorfa in  $i$  e  $-i$ .

Verifichiamo inoltre che

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| = 0.$$

Possiamo quindi estendere ulteriormente, ponendo  $\bar{f}(\infty) = 0$ . Si ha che la  $g$  nella Definizione 8 è

$$g(w) = \begin{cases} \frac{w^2}{w^2+1} & \text{se } w \in \mathbb{C} - \{0, i, -i\}, \\ 0 & \text{se } w = 0, \end{cases}$$

che è olomorfa in 0. Concludiamo che  $\bar{f}$  è olomorfa anche all'  $\infty$ . Abbiamo esteso  $f$  a una funzione olomorfa  $\bar{f} : \mathbb{C} \cup \infty \rightarrow \mathbb{C} \cup \infty$ , avendo posto  $\bar{f}(\pm i) = \infty$  e  $\bar{f}(\infty) = 0$ .  $\square$

### Caso $\bar{f}(\infty) = \infty$

Sia  $K \subset \mathbb{C}$  un compatto e  $f : \mathbb{C} - K \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione tale che  $f(z) \neq 0$  per ogni  $z \in \mathbb{C} - K$ . Supponiamo che

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty.$$

Diamo la seguente

**Definizione 10** *L'estensione di  $f$ ,  $\bar{f} : (\mathbb{C} - K) \cup \infty \rightarrow \mathbb{C} \cup \infty$ , è la funzione definita ponendo  $\bar{f}(z) = f(z)$  per ogni  $z \in \mathbb{C} - K$  e  $\bar{f}(\infty) = \infty$ . Diciamo che  $\bar{f}$  è olomorfa all'  $\infty$  se la funzione*

$$g(w) = \begin{cases} 1/f(1/w) & \text{se } w \neq 0 \text{ e } 1/w \in \mathbb{C} - K, \\ 0 & \text{se } w = 0, \end{cases}$$

è olomorfa in un intorno di 0.

**Esempio.** Sia

$$f(z) = \frac{z^3}{z+1},$$

definita su  $\mathbb{C} - \{-1\}$ . Calcoliamo che

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty.$$

Quindi estendiamo  $f$  ponendo  $\bar{f}(\infty) = \infty$ . La  $g$  data nella Definizione 10 è

$$g(w) = \begin{cases} w^2(w+1) & \text{se } w \in \mathbb{C} - \{0, -1\} \\ 0 & \text{se } w = 0, \end{cases}$$

Chiaramente  $g$  è olomorfa in un intorno di 0.

Osserviamo anche che

$$\lim_{z \rightarrow -1} |f(z)| = \infty.$$

Possiamo quindi estendere ulteriormente ponendo  $\bar{f}(-1) = \infty$ . Vediamo se  $\bar{f}$  è olomorfa in  $p$ . Calcoliamo la  $g$  data nella Definizione 9:

$$g(w) = \begin{cases} \frac{w+1}{w^3} & \text{se } w \in \mathbb{C} - \{0, -1\}, \\ 0 & \text{se } w = -1. \end{cases}$$

Si ha ancora che  $g$  è olomorfa in  $-1$ . Concludiamo che  $f$  può essere estesa ad una funzione olomorfa  $\bar{f} : \mathbb{C} \cup \infty \rightarrow \mathbb{C} \cup \infty$ , ponendo  $\bar{f}(-1) = \infty$  e  $\bar{f}(\infty) = \infty$ .  $\square$

**Esempio.** Sia

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z+1}}}{z^2 - 4},$$

definita su  $\mathbb{C} - \{-1, 2, -2\}$ . Osserviamo che

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0.$$

Poniamo quindi  $\bar{f}(\infty) = 0$ . Vediamo se  $\bar{f}$  è olomorfa all'  $\infty$  utilizzando la Definizione 8. Si ha

$$g(w) = \begin{cases} \frac{w^2 e^{\frac{w}{w+1}}}{1-4w^2} & \text{se } w \in \mathbb{C} - \{0, -1, 1/2, -1/2\} \\ 0 & \text{se } w = 0, \end{cases}$$

che è olomorfa in  $0$ , quindi  $\bar{f}$  è olomorfa all'  $\infty$ .

Notiamo che  $f$  non può essere estesa a  $-1$ , infatti

$$\lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{z+1} = \infty$$

e sappiamo che la funzione esponenziale non ammette estensione all'  $\infty$ . Ovvero  $\lim_{z \rightarrow -1} f(z)$  non esiste.

Esaminiamo i punti  $2$  e  $-2$ . Si ha

$$\lim_{z \rightarrow \pm 2} f(z) = \infty.$$

Quindi estendiamo ponendo  $\bar{f}(\pm 2) = \infty$ . Verifichiamo anche che

$$g(w) = \begin{cases} \frac{w^2 - 4}{e^{\frac{1}{w+1}}} & \text{se } w \in \mathbb{C} - \{-1, 2, -2\} \\ 0 & \text{se } w = \pm 2, \end{cases}$$

è olomorfa in  $\pm 2$ . Concludiamo che  $f$  ammette un'estensione olomorfa  $\bar{f} : (\mathbb{C} - \{-1\}) \cup \infty \rightarrow \mathbb{C} \cup \infty$  ottenuta ponendo  $\bar{f}(2) = \bar{f}(-2) = \infty$  e  $\bar{f}(\infty) = 0$ .  $\square$

**Esercizio.** Sia  $f$  una funzione del tipo

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

dove  $P$  e  $Q$  sono dei polinomi, con  $Q$  non identicamente nullo. Si ha che  $f$  è definita per ogni  $z$  con  $Q(z) \neq 0$ . Dimostrare che  $f$  può essere estesa a una funzione olomorfa  $\bar{f} : \mathbb{C} \cup \infty \rightarrow \mathbb{C} \cup \infty$ . Questo tipo di funzioni si chiamano **funzioni razionali**. (Suggerimento: si può assumere che  $P$  e  $Q$  non abbiano fattori in comune. Fattorizzate  $Q$  in polinomi di primo grado. Verificate poi la possibilità di estendere  $f$  ad ogni radice di  $Q$ . Infine estendete a  $\infty$ .)  $\square$

## 5 Mappe olomorfe della sfera di Riemann

Nella sezione precedente abbiamo visto come in certi casi, funzioni definite su  $\mathbb{C}$  meno un numero finito di punti, possono essere estese a funzioni della sfera in sé. Nell'ultimo esercizio proposto si chiedeva di dimostrare che questo è il caso, ad esempio, delle funzioni razionali. Sia  $\Sigma := \mathbb{C} \cup \infty$ . In questa sezione daremo un senso al concetto di funzione olomorfa  $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$  più in generale. Vedremo che questa classe di funzioni, sebbene in apparenza più generale, in realtà coincide con l'insieme delle funzioni razionali, ovvero con funzioni del tipo

discusso nella sezione precedente. Ci saranno utili a questo proposito molti dei teoremi di analisi complessa dimostrati durante il corso.

Sia  $I : \Sigma \rightarrow \Sigma$  la funzione della sfera in sé definita da

$$I(z) = \begin{cases} 1/z & \text{se } z \in \mathbb{C}^*, \\ 0 & \text{se } z = \infty, \\ \infty & \text{se } z = 0. \end{cases}$$

Chiaramente questa è una funzione olomorfa della sfera nel senso discusso nella sezione precedente, inoltre è un omeomorfismo.

Diamo la seguente

**Definizione 11** Una funzione continua  $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$  non costante si dice olomorfa se, date le funzioni  $g_1 = f \circ I$ ,  $g_2 = I \circ f$  e  $g_3 = I \circ f \circ I$ , si ha

(i)  $f$  ristretta a  $\mathbb{C} - f^{-1}(\infty)$  è olomorfa nel senso solito;

(ii) per ogni  $j = 1, 2, 3$ ,  $g_j$  ristretta a  $\mathbb{C} - g_j^{-1}(\infty)$  è olomorfa nel senso solito.

Si noti che le funzioni  $g_j$  sono proprio quelle funzioni ausiliarie utilizzate per definire l'estensione olomorfa di una funzione nella sezione precedente. Infatti le funzioni estendibili sono olomorfe anche nel senso di questa definizione. In particolare le estensioni di funzioni razionali sono funzioni olomorfe. Dimosteremo

**Teorema 12** Se  $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$  è olomorfa e non costante, allora  $f$  ristretta a  $\mathbb{C} - f^{-1}(\infty)$  è razionale.

La dimostrazione utilizza la seguente

**Proposizione 13** Sia  $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$  una mappa olomorfa non costante. Allora per ogni  $c \in \Sigma$ ,  $f^{-1}(c)$  è costituito da al più un numero finito di punti.

Facciamo vedere che data per buona questa proposizione riusciamo a dimostrare il teorema.

Per la proposizione abbiamo che  $f^{-1}(\infty)$  è un numero finito di punti. In particolare sia  $\{p_1, \dots, p_k\} = \mathbb{C} \cap f^{-1}(\infty)$  e lavoriamo con  $f$  ristretta a  $\Omega := \mathbb{C} - \{p_1, \dots, p_m\}$ . In particolare ciascun  $p_j$  è una singolarità isolata. Poichè  $f$  è continua sulla sfera,

$$\lim_{z \rightarrow p_j} f(z) = \infty,$$

ovvero ciascun  $p_j$  è un polo. Dal teorema dei poli segue che per ciascun  $p_j$  esiste un intero positivo  $k_j$  tale che la funzione

$$Q_j(z) = (z - p_j)^{k_j} f(z)$$

è definita e olomorfa su  $\Omega \cup \{p_j\}$  e  $Q_j(p_j) \neq 0$ . Ne segue che la funzione

$$Q(z) = (z - p_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (z - p_m)^{k_m} f(z)$$

è definita e olomorfa su tutto  $\mathbb{C}$ , inoltre  $Q(p_j) \neq 0$  per ogni  $j = 1, \dots, m$ . Quindi gli zeri di  $Q$  sono gli zeri di  $f$ , che per la Proposizione 13 sono in numero finito. Siano questi i punti  $\{z_1, \dots, z_r\}$ . Per la caratterizzazione degli zeri di una funzione olomorfa, per ogni  $z_j$  esiste un intero positivo  $d_j$  tale che

$$H_j(z) = \frac{Q(z)}{(z - z_j)^{d_j}}$$

è definita e olomorfa su  $\mathbb{C}$  e tale che  $H_j(z_j) \neq 0$ . Ne segue che la funzione

$$H(z) = \frac{Q(z)}{(z - z_1)^{d_1} \cdot \dots \cdot (z - z_r)^{d_r}} = \frac{(z - p_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (z - p_m)^{k_m}}{(z - z_1)^{d_1} \cdot \dots \cdot (z - z_r)^{d_r}} f(z)$$

è definita e olomorfa su  $\mathbb{C}$ . Inoltre  $H$  è priva di zeri. Siano  $k = k_1 + \dots + k_m$  e  $d = d_1 + \dots + d_r$ .

Se  $f(\infty) \in \mathbb{C}$  e  $d \geq h$ , si ha che  $H$  è limitata, poichè  $\lim_{z \rightarrow \infty} H \in \mathbb{C}$ . Per il teorema di Liouville  $H(z) = c$  per ogni  $z \in \mathbb{C}$ , dove  $c$  è una costante non nulla. Ne segue che

$$f(z) = c \frac{(z - z_1)^{d_1} \cdot \dots \cdot (z - z_r)^{d_r}}{(z - p_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (z - p_m)^{k_m}},$$

ovvero che  $f$  è razionale.

Se  $f(\infty) \in \mathbb{C}$  e  $d < k$  allora la funzione  $1/H$  è definita, olomorfa e limitata su  $\mathbb{C}$ , poichè  $H$  non è mai nulla e  $\lim_{z \rightarrow \infty} H = \infty$ . Quindi  $1/H$  è costante e  $f$  razionale.

Nel caso in cui  $f(\infty) = \infty$  osserviamo che la funzione  $I \circ f$  è anch'essa olomorfa su  $\Sigma$ , inoltre  $I \circ f(\infty) = 0$ , quindi è una funzione olomorfa su  $\Sigma$  che rientra nel caso precedente. Ovvero  $g = I \circ f$  ristretta a  $\mathbb{C} - g^{-1}(\infty)$  è razionale, ovvero  $1/f(z)$  è razionale e quindi anche  $f$  lo è.  $\square$

Per avere una dimostrazione completa del Teorema 12, occorre dimostrare la Proposizione 13. Potete ricavarne voi stessi la dimostrazione svolgendo la seguente serie di esercizi guidati.

### Esercizi per dimostrare la Proposizione 13

1. Sia  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un aperto e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione analitica non costante. Sia  $z_0 \in \Omega$  uno zero di  $f$ . Dimostrate che esiste un intorno aperto  $D \subset \Omega$  di  $z_0$  tale  $z_0$  è l'unico zero di  $f$  contenuto in  $D$ . (Suggerimento: scrivere  $f(z) = (z - z_0)^k Q(z)$  tale che  $Q(z_0) \neq 0$ .)
2. Sia  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un aperto e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione analitica non costante. Sia  $f(z_0) = c$ ,  $z_0 \in \Omega$ . Dimostrate che esiste un intorno aperto  $D \subset \Omega$  di  $z_0$  tale  $z_0$  è l'unica soluzione di  $f(z_0) = c$  contenuta in  $D$ .
3. Sia  $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$  una funzione olomorfa non costante. Siano  $p, q \in \Sigma$ , supponiamo  $f(p) = q$ . Dimostrate che esiste un intorno aperto  $D$  di  $p$  tale che  $p$  è l'unica soluzione di  $f(z) = q$  contenuta in  $D$ . (Suggerimento: nel caso  $p, q$  siano in  $\mathbb{C}$ , ci si riconduce facilmente al caso dell'Esercizio 2, nel caso in cui  $p$  o  $q$  siano  $\infty$ , ci si riconduce al caso precedente componendo in modo opportuno con la funzione  $I$ .)
4. Dimostrate la Proposizione 13. (Suggerimento: procedete come segue. Assumete per assurdo che  $f^{-1}(c)$  sia costituito da un numero infinito di punti distinti  $\{p_n\}$ . La sfera  $\Sigma$  è compatta perciò una sottosuccessione di  $\{p_n\}$  converge a un punto  $p \in \Sigma$ . Questo conduce a una contraddizione del risultato dimostrato nell'Esercizio 3.)

### Altri esercizi

1. Dimostrate utilizzando il Teorema 12 che una funzione olomorfa  $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$  non costante è suriettiva.
2. Dimostrate l'Esercizio 1 in quest'altro modo. Osservate che  $f(\Sigma) \subseteq \Sigma$  è chiuso. Supponete per assurdo che  $\infty \notin f(\Sigma)$ . Deducetene che  $f$  ristretta  $\mathbb{C}$  è limitata. Questa è una contraddizione. Perché? In generale se esiste  $q \notin f(\Sigma)$ , ci si può ricondurre al caso  $q = \infty$  componendo  $f$  con una opportuna trasformazione di Möbius.

## 6 Logaritmo, radici, superficie di Riemann

### Il logaritmo complesso

Il logaritmo di un numero reale  $x$  è univocamente definito dalla formula

$$e^{\log x} = x.$$

Questa formula ha senso solo se  $x > 0$  e inoltre definisce il logaritmo in modo univoco poichè  $e^a = 1$  se e solo se  $a = 0$ . La definizione del logaritmo in campo complesso presenta qualche difficoltà poichè l'esponenziale non è



iniettivo, infatti  $e^{2\pi in} = 1$  per ogni  $n \in \mathbb{Z}$ . Tuttavia si è visto che l'esponenziale complesso è un diffeomorfismo locale, ovvero è invertibile localmente, quindi in un intorno di ogni punto in  $\mathbb{C}$  esiste una funzione  $f$  tale che

$$e^{f(z)} = z. \quad (8)$$

Tuttavia potrebbero esserci più scelte di una tale funzione. Si definisce “ramo di  $\log z$ ” una funzione  $f$  olomorfa in una regione  $D \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$  che soddisfa (8). Osserviamo che dalla (8) segue che  $f'(z)e^{f(z)} = 1$  e quindi che

$$f'(z) = 1/z \quad (9)$$

in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Da questo segue che  $D$  non può coincidere con  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , poichè, se così fosse, data una curva  $\gamma$  che gira una volta attorno all'origine ( $\gamma(a) = \gamma(b)$ ) avremmo

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_{\gamma} f'(z) dz = f(\gamma(a)) - f(\gamma(b)) = 0,$$

mentre sappiamo che

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

Come anticipato, non esiste un unico ramo del logaritmo. Infatti se su una regione  $D$  ne esiste uno allora ne esistono infiniti, poichè se  $f$  è un ramo del logaritmo anche  $f_n(z) = f(z) + 2\pi in$  lo è per ogni  $n \in \mathbb{Z}$ . Tuttavia queste sono le uniche possibili scelte, infatti se  $e^g(z) = e^f(z)$  allora si deve avere  $g(z) = f(z) + 2\pi in$  per qualche  $n \in \mathbb{Z}$ .

Conveniamo ora di indicare con  $\log_{(n)} z$  i vari rami, tutti definiti in  $D$ . I diversi rami si distinguono, ad esempio, per il loro valore in un punto di  $D$ . Se  $D$  è  $\mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0}$  allora possiamo distinguerli per i loro valori in  $z = 1$ . Tutte le possibilità sono  $\log_{(n)} 1 = 2\pi in$ . Per convenzione denoteremo  $\log z := \log_{(0)} z$ . Usando la rappresentazione esponenziale dei numeri complessi  $z = \rho e^{i\theta}$ , con l'angolo  $-\pi < \theta < \pi$ , abbiamo che

$$\log z = \log \rho + i\theta.$$

La (9) suggerisce che possiamo anche dare un'altra definizione di ramo del logaritmo. Infatti sia  $D = \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0}$  e sia  $\gamma_{1,z}$  una curva dentro  $D$  che collega 1 ad un punto  $z$ . Allora si ha che

$$\log_{(n)} z = \int_{\gamma_{1,z}} \frac{d\xi}{\xi} + 2\pi ni.$$

Questa definizione è indipendente dalla scelta della curva  $\gamma$ , poichè  $D$  è semplicemente connesso. Da questa definizione, inoltre, si nota che  $\log_{(n)} z$  è olomorfa e ha per derivata  $1/z$ . Si osserva anche che

$$e^{\log_{(n)} z} = z. \quad (10)$$

Infatti, ponendo  $g(z) = ze^{-\log_{(n)} z}$ , si calcola che  $g'(z) = 0$ . Quindi  $g$  è costante e poichè  $g(1) = 1$  si ha  $g = 1$ . Ovvero vale la (10). La scelta di 1 come punto di partenza non è obbligatoria, si potrebbe prendere un qualsiasi punto  $z_0$ , che non stia sulla semiretta  $\mathbb{R}_{\leq 0}$ , e porre

$$\log_{(n)} z = \int_{\gamma_{z_0,z}} \frac{d\xi}{\xi} + \log_{(n)} z_0.$$

Se  $z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}$ , con  $-\pi < \theta_0 < \pi$  abbiamo

$$\log_{(n)} z = \log \rho_0 + i\theta_0 + 2\pi ni.$$

Osserviamo che, con le scelte fatte, non è possibile estendere per continuità  $\log_{(n)} z$  alla semiretta  $\mathbb{R}_{\leq 0}$ . Infatti dato  $a < 0$ , denotiamo con  $\lim_{z \rightarrow a^+}$  (rispettivamente  $\lim_{z \rightarrow a^-}$ ) il limite al tendere di  $z$  ad  $a$  “da sopra” (risp. “da sotto”), ovvero assumendo  $\text{Im } z > 0$  (risp.  $\text{Im } z < 0$ ). Si ha, allora, da un lato

$$\lim_{z \rightarrow a^+} \log_{(n)} z = \int_{\gamma_1} \frac{d\xi}{\xi} + 2\pi ni = \log(-a) + \pi i + 2\pi ni,$$

mentre dall'altro

$$\lim_{z \rightarrow a^-} \log_{(n)} z = \int_{\gamma_2} \frac{d\xi}{\xi} + 2\pi ni = \log(-a) - \pi i + 2\pi ni,$$

dove abbiamo integrato lungo due curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  come in Figura 7.

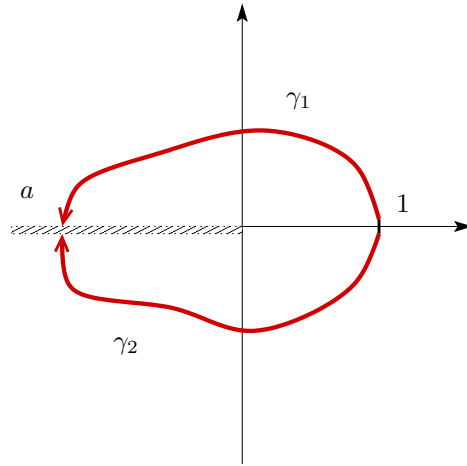


Figura 7: La discontinuità di un ramo del logaritmo può essere vista integrando lungo le due curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ .

Questo fatto non sorprende poichè percorrendo  $\gamma_2$  al contrario e poi proseguendo lungo  $\gamma_1$  otteniamo

$$\int_{-\gamma_2 + \gamma_1} \frac{d\xi}{\xi} = - \int_{\gamma_2} \frac{d\xi}{\xi} + \int_{\gamma_1} \frac{d\xi}{\xi} = 2\pi i.$$

Osserviamo però che

$$\lim_{z \rightarrow a^-} \log_{(n+1)} z = \log(-a) - \pi i + 2\pi ni + 2\pi i = \lim_{z \rightarrow a^+} \log_{(n)} z. \quad (11)$$

Anche la scelta fatta del dominio  $D$  non è obbligatoria, infatti potevamo scegliere, per esempio,  $D = \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\geq 0}$  e definire  $\log(-1) = i\pi$ . In questo caso avremmo  $\log z = \log \rho + i\theta$ , con  $0 < \theta < 2\pi$ , e  $\log z$  non sarebbe estendibile con continuità alla semiretta  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ . In generale, si può prendere  $D = \mathbb{C} - \{\text{semiretta dall'origine}\}$ , nel qual caso non potremmo estendere  $\log z$  alla semiretta.

## La superficie di Riemann di $\log z$

Il fatto che ogni ramo del logaritmo su  $D = \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0}$  non sia estendibile per continuità alla semiretta  $\mathbb{R}_{\leq 0}$  è un po' "fastidioso". Soprattutto in considerazione del fatto che scegliendo un diverso dominio di definizione, ad esempio  $D = \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\geq 0}$ , otteniamo rami di logaritmo definiti e olomorfi sulla retta  $\mathbb{R}_{\leq 0}$ , a scapito però di aver perso la definizione su  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ . La soluzione di questo "fastidio" è stata fornita da Riemann e si basa sull'osservazione che il dominio  $D$  è inadeguato alla definizione di  $\log$  e che in realtà possiamo costruire uno "spazio" più ampio sul quale il logaritmo è definito, olomorfo e non presenta discontinuità "fastidiose". Questo spazio, che denoteremo con  $S$ , è un esempio di superficie di Riemann e viene detto superficie di Riemann del logaritmo. Questa superficie è omeomorfa a  $\mathbb{C}$ . Dimostreremo che esistono funzioni  $\phi : S \rightarrow \mathbb{C}$  e  $\psi : S \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$  tali che  $e^\phi = \psi$ . La funzione  $\phi$  è la "giusta" definizione del logaritmo e, per questa funzione, vale la formula  $\phi(ab) = \phi(a) + \phi(b)$ . La superficie  $S$  è ottenuta "incollando" fra loro infinite copie della regione  $D$ . La funzione  $\phi$ , ristretta a ciascuna di queste copie, è proprio un ramo del logaritmo.

Consideriamo  $\mathbb{C} - \{0\}$  e applichiamo la seguente trasformazione continua

$$\tau : \rho e^{i\theta} \rightarrow (2 - e^{-\rho}) e^{i\theta}.$$

Questa è un omeomorfismo (o se si preferisce un cambiamento di coordinate) tra  $\mathbb{C} - \{0\}$  e la corona  $C = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$ . Si noti che  $\tau$  identifica la regione  $D = \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0}$ , con la corona “tagliata”  $E := C - L$ , dove  $L$  è l’intervallo  $(-2, 1)$ . E’ chiaro che  $E$  è omeomorfo a  $\mathbb{C}$ .

Avvisiamo che il cambiamento di coordinate  $\tau$  non è essenziale alla costruzione che segue, ma ci serve solamente per facilitarne la visualizzazione.

Prendiamo ora infinite copie di  $E$  e di  $L$  e denotiamo ciascuna con  $E_{(n)}$  e  $L_{(n)}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Per convenzione chiamiamo  $E := E_{(0)}$  e  $L := L_{(0)}$ . Immaginando di aprire la  $E_{(n)}$  lungo il taglio  $L_{(n)}$ , notiamo che  $E_{(n)}$  ha due bordi corrispondenti uno al lato di  $L$  dove  $\text{Im } z > 0$ , che chiamiamo  $L_{(n)}^+$ , e l’altro al lato dove  $\text{Im } z < 0$ , che chiamiamo  $L_{(n)}^-$ . Ora considero l’insieme  $S$  ottenuto da  $\bigcup_{-\infty}^{+\infty} E_{(n)}$  incollando  $L_{(n)}^+$  a  $L_{(n+1)}^-$ . Visualizzando tutto in  $\mathbb{R}^3$  ottengo una spirale infinita che si avvolge lungo l’asse verticale. Proiettando la spirale sul piano orizzontale ho una mappa  $\pi : S \rightarrow C$ , che componendo con  $\tau^{-1}$  posso considerare come una mappa  $\psi : S \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ . Ogni punto di  $\mathbb{C} - \{0\}$  è l’immagine di infiniti punti di  $S$  rispetto a  $\psi$ , ovvero ha infiniti punti di  $S$  “sopra di lui”. Possiamo ora definire

$$\phi(s) = \log_{(n)} \tau^{-1}(s),$$

se  $s \in E_{(n)}$ . Vogliamo ora estendere la definizione, in maniera continua, anche ai tagli  $L_{(n)}$ . Sia perciò  $s_0 \in L$ . Indichiamo con  $s_n^+$  (rispettivamente con  $s_n^-$ ) la copia di  $s_0$  dentro  $L_{(n)}^+$  (rispettivamente dentro  $L_{(n)}^-$ ). Dalla (11) segue che

$$\lim_{s \rightarrow s_n^+} \log_{(n)} \tau^{-1}(s) = \lim_{s \rightarrow s_{n+1}^-} \log_{(n+1)} \tau^{-1}(s).$$

Perciò, se poniamo

$$\phi(s_n^+) = \lim_{s \rightarrow s_n^+} \log_{(n)} \tau^{-1}(s),$$

e

$$\phi(s_n^-) = \lim_{s \rightarrow s_n^-} \log_{(n)} \tau^{-1}(s),$$

per ogni  $n \in \mathbb{Z}$ , questa definizione è compatibile con l’identificazione di  $s_n^+$  a  $s_{n+1}^-$  ottenuta nella costruzione di  $S$ . Ovvero, se denotiamo con  $s_n$  il punto di  $S$  ottenuto identificando  $s_n^+$  a  $s_{n+1}^-$  possiamo definire  $\phi(s_n)$  come  $\phi(s_n^+)$  o come  $\phi(s_{n+1}^-)$  senza contraddizione, poichè i due valori sono identici. Inoltre  $\phi$  risulta continua in  $\phi(s_n)$ . Osserviamo che  $\phi$  risulta olomorfa sugli  $E_{(n)}$  e continua sugli  $L_{(n)}$  e quindi olomorfa (per le proprietà delle funzioni olomorfe) su  $S$ .

Il termine olomorfo è qui usato con un po’ di abuso di linguaggio, infatti  $\log_{(n)} \tau^{-1}(s)$  non è di per sé olomorfa nella coordinata  $s$ , poichè  $\tau$  non è olomorfa. Tuttavia nella coordinata  $z = \tau^{-1}(s)$  la funzione risulta olomorfa.

## Le radici $q$ -esime

Veniamo ora alla definizione del concetto funzione “radice  $q$ -esima”. Si presentano qui problemi analoghi al caso del logaritmo, ma leggermente più difficili. La definizione più ovvia di radice  $q$ -esima di  $z$  è

$$z_{(n)}^{1/q} = \exp \frac{\log_{(n)} z}{q}.$$

Come ci si potrebbe aspettare da una definizione di radice  $q$ -esima, questa funzione ha solo  $q$ -rami, che corrisponde al fatto che ogni numero complesso (diverso da zero) ha esattamente  $q$  radici  $q$ -esime. Ponendo  $\epsilon = e^{\frac{2\pi i}{q}}$  si ha  $\epsilon^q = 1$ . Notiamo, che si ha

$$z_{(j+1)}^{1/q} = \epsilon z_{(j)}^{1/q},$$

per  $j = 0, \dots, q$ . Ne segue che  $z_{(q)}^{1/q} = z_{(0)}^{1/q}$ . Ciascuno dei rami è definito su  $\mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0}$ . Studiamo, come esempio chiarificatore, il caso della radice quadrata  $\sqrt{z}$ . Si ha

$$z_{(0)}^{1/q} = \exp \left( \frac{1}{2} \int_{\gamma_{1,z}} \frac{d\xi}{\xi} \right) = \sqrt{z},$$

$$z_{(1)}^{1/q} = \exp \left( \frac{1}{2} \int_{\gamma_{1,z}} \frac{d\xi}{\xi} + i\pi \right) = -z_{(0)}^{1/q} = -\sqrt[q]{z}.$$

Se integro lungo una curva che compie un giro attorno all'origine ritornando al punto di partenza trovo una discontinuità, analogamente a quanto visto con il logaritmo. Ad esempio definisco  $\sqrt{1} = 1$ , ma poi

$$\exp \left( \frac{1}{2} \int_{\gamma_{1,1}} \frac{d\xi}{\xi} \right) = \exp \frac{2\pi i}{2} = -1,$$

dove  $\gamma_{1,1}$  è una curva che parte da 1 e gira attorno all'origine una volta tornando in 1. Se invece faccio due giri ottengo

$$\exp \left( \frac{1}{2} \int_{\gamma_{1,1} + \gamma_{1,1}} \frac{d\xi}{\xi} \right) = \exp \frac{4\pi i}{2} = 1.$$

Vuole dire che i due rami si ricongiungono dopo due giri. Cioè, partendo dal primo ramo, compiendo un giro passo al secondo ramo e dopo un'altro giro ritorno al primo. Mentre la superficie  $S$  del logaritmo è una spirale infinita, la superficie  $S$  della radice  $q$ -esima inizia come spirale, ma poi dopo  $q$  giri ritorna, attraverso il "buco", al ramo iniziale. La superficie  $S$  della radice  $q$ -esima può anche essere vista come segue. Prendiamo  $q$ -copie della corona tagliata  $E$ , che chiamiamo  $E_{(0)}, \dots, E_{(q-1)}$ . Incolliamo  $E_{(j)}$  a  $E_{(j+1)}$  identificando  $L_{(j)}^+$  a  $L_{(j+1)}^-$ , per  $j = 0, \dots, q-2$ , come visto nel caso del logaritmo. Otteniamo così una striscia. Ora però, per il fatto che dopo il  $(q-1)$ -esimo ramo ritorniamo al 0-esimo, dobbiamo anche incollare  $L_{(q-1)}^+$  a  $L_{(0)}^-$ . In questo modo otteniamo un cilindro. Noto che la  $S$  così definita è ancora orientabile. Analogamente a quanto visto con il logaritmo possiamo definire  $\phi : S \rightarrow \mathbb{C}$  e  $\psi : S \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$  tali che  $\phi^q = \psi$ . La descrizione data di  $S$  distrugge la visualizzazione di  $\psi$  come proiezione "verticale" ma non ne inficia l'esistenza. Ogni punto  $z$  di  $\mathbb{C} - \{0\}$  ha esattamente  $q$  punti  $s_0, \dots, s_{q-1}$  tali che  $\psi(s_0) = \dots = \psi(s_{q-1}) = z$ . Per visualizzare questo fatto, immaginate di disporre le  $q$  corone tagliate,  $E_{(0)}, \dots, E_{(q-1)}$ , lungo la spirale del logaritmo e usate la proiezione verticale  $\psi$  del logaritmo. Quasi ogni punto sulla corona nel piano orizzontale ha esattamente  $q$  punti sopra di lui appartenenti a uno degli  $E_{(j)}$  con  $j = 0, \dots, q-1$ , eccetto quelli che stanno sul bordo  $L_{(0)}^-$ , che ne hanno  $q+1$ , il  $q+1$ -esimo è un punto che sta su  $L_{(q-1)}^+$ . Qui dobbiamo ricordarci però che nella superficie di Riemann della radice  $q$ -esima il punto su  $L_{(0)}^-$  e quello su  $L_{(q-1)}^+$  sono identificati, cioè contano come uno solo. Quindi il conto torna: ogni punto ha esattamente  $q$  punti sopra di lui.

Osserviamo ora che

$$\lim_{z \rightarrow 0} z_{(n)}^{1/q} = 0,$$

per ogni  $n \in \mathbb{Z}$ . Quindi è lecito definire la radice  $q$ -esima in zero come 0, tuttavia a differenza degli altri punti, 0 ha una sola radice  $q$ -esima. Questo significa che per completare la superficie di Riemann della radice  $q$ -esima in modo che contenga anche l'unica radice di 0 dobbiamo aggiungere un solo punto ad  $S$ , che chiamiamo  $s_0$ . Per continuità definiamo  $\phi(s_0) = 0$ . Otteniamo così  $\phi : S \cup \{s_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  e  $\psi : S \cup \{s_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  tali che  $\phi^q = \psi$ . In particolare  $\phi(s_0)^q = \psi(s_0) = 0$ .

Possiamo ora aggiungere anche  $\infty$  a  $\mathbb{C}$  e  $s_\infty$  a  $S \cup \{s_0\}$  e, osservato che

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z_{(n)}^{1/q} = \infty,$$

definiamo  $\phi(s_\infty) = \infty$ . Ora abbiamo così definite mappe  $\phi : S \cup \{s_0, s_\infty\} \rightarrow \Sigma$  e  $\psi : S \cup \{s_0\} \rightarrow \Sigma$ , dove  $\Sigma$  è la sfera di Riemann, tali che  $\phi^q = \psi$ .

Notiamo che  $S \cup \{s_0, s_\infty\}$  è omeomorfa a  $\Sigma$ , ovvero è una sfera. Per visualizzare questo fatto, ritorniamo alla interpretazione di  $S$  come un cilindro ottenuto identificando le corone tagliate  $E_{(0)}, \dots, E_{(q-1)}$  come spiegato sopra. Il bordo di  $S$  è dunque costituito da due cerchi. Ora, aggiungere  $s_0$  significa identificare fra loro tutti i punti di uno dei cerchi, mentre aggiungere  $s_\infty$  corrisponde a identificare i punti dell'altro cerchio. Otteniamo così una sfera.

## Logaritmi e radici di polinomi

Vogliamo ora studiare funzioni del tipo  $\log f(z)$  o  $f(z)^{1/q}$ , dove  $f(z)$  è una funzione olomorfa qualsiasi. Nel caso di  $\log f(z)$  per definirne ciascun ramo devo considerare regioni semplicemente connesse dove  $f$  è definita e non ha zeri o singolarità. Supponiamo, ad esempio, che  $f$  sia intera ed abbia un solo zero in  $z_0$ . Allora posso considerare la regione ottenuta eliminando una semiretta che parte da  $z_0$ , e definire

$$\log_{(n)} f(z) = \int_{\gamma_{z_0, z}} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi + \log_{(n)} f(z_0).$$

Illustriamo con dettaglio il caso in cui  $f$  sia un polinomio. Non avendo poli, il teorema sul numero degli zeri (conseguenza del teorema dei residui) dice che, se  $\gamma$  è una curva chiusa semplice che non passa per gli zeri di  $f$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi = \#Z(P, \gamma),$$

dove  $Z(P, \gamma)$  è il numero degli zeri racchiusi da  $\gamma$ . Questa formula ci aiuta a capire la natura della discontinuità di  $\log_{(n)} f(z)$ .

Facciamo un esempio. Supponiamo che  $f$  abbia tre zeri di ordine 1:  $\xi_0, \xi_1, \xi_2$ . Possiamo congiungere  $\xi_0$  a  $\xi_1$  con un segmento  $C_0$ ,  $\xi_1$  a  $\xi_2$  con un segmento  $C_1$  e poi prendere una semiretta  $C_2$  che parte da  $\xi_0$ , ottenendo così una curva spezzata  $C = C_0 \cup C_1 \cup C_2$ . Consideriamo  $D = \mathbb{C} - C$ . Certamente  $D$  è semplicemente connesso. Ora prendiamo un punto  $z_0 \in D$  e un punto  $z_1$  sulla semiretta  $C_2$ , e due curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  in  $D$  congiungenti  $z_0$  a  $z_1$  in modo che la curva  $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$  giri una sola volta attorno a tutti gli zeri di  $f$ . Otteniamo così

$$6\pi i = \int_{\gamma} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi = \int_{\gamma_1} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi - \int_{\gamma_2} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi.$$

Questo mi dice che non posso estendere  $\log_{(n)} f(z)$  a  $z_1$ , poichè osservo che in  $z_1$ ,  $\log_{(n)} f(z)$  fa un "salto" pari a  $6\pi i$ . Denotiamo questo salto con  $\Delta_{\gamma} \log f$ .

Per un polinomio più generale, ho sempre un numero finito di zeri isolati che posso congiungere con una curva spezzata  $C$ , che passa anche per  $\infty$ . La regione  $D = \mathbb{C} - C$  è semplicemente connessa. La discontinuità di  $\log_{(n)} f(z)$  è descritta dalle quantità  $\Delta_{\gamma} \log f$  date da

$$\Delta_{\gamma} \log f(z) = 2\pi i \#Z(\gamma, f).$$

Abbiamo anche che

$$\Delta_{\gamma} \log f(z) = i \Delta_{\gamma} \arg f.$$

Possiamo anche osservare che  $2\pi i \#Z(\gamma, f)$  è il numero di avvolgimento della curva  $f \circ \gamma$ .