Esercizi su serie, funzione esponenziale, seni e coseni.

Diego Matessi.

Versione del 8 Dicembre 2005

(1) Sia $\theta \neq 2k\pi$. Dimostrate che valgono le seguenti formule

$$\sum_{n=0}^{N} \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\cos N\theta - \cos(N+1)\theta}{2(1-\cos\theta)},$$

$$\sum_{n=0}^{N} \sin n\theta = \frac{\sin N\theta - \sin(N+1)\theta + sin\theta}{2(1-\cos\theta)}.$$

Deducetene che le successioni $c_N = \sum_{n=0}^{N} \cos n\theta$ e $s_N = \sum_{n=0}^{N} \sin n\theta$ sono limitate. (Consiglio: osservate che $e^{i\,n\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta$ e lavorate il più possibile con i complessi!)

(2) Ricordiamo il seguente criterio di convergenza

La serie $\sum a_n b_n$ è convergente se la successione delle somme parziali $t_N = \sum_{n=1}^{N} b_n$ è limitata e la successione $\{a_n\}$ tende a zero non crescendo.

Utilizzatelo per dimostrare che, dato $\theta \neq 2k\pi$, le serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\theta}{n} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$$

sono convergenti.

(3) La serie

$$\sum z^n$$

ha raggio di convergenza uguale a 1. Verificate che la serie è divergente per ogni z sul bordo del disco $B(0,1)$. Dimostrate che la funzione

$$f(z) = \sum z^n,$$

definita apparentemente solo nell'interno di $B(0,1)$, può essere estesa in maniera continua (e olomorfa!) a tutti i punti del cerchio unitario eccetto $z = 1$. (Consiglio: calcolare esplicitamente la somma!)

(4) Supponiamo che la serie $f(z) = \sum a_n z^n$ abbia raggio di convergenza $R > 0$. Dimostrate che la serie

$$F(z) = \sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$$

ha lo stesso raggio di convergenza. Dimostrate inoltre che $F(z)$ olomorfa e che

$$F'(z) = f(z).$$

(5) Siano $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Dimostrate, usando l'esercizio precedente, che $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ ha raggio di convergenza 1, che F è olomorfa e che $F'(z) = f(z)$. Sapete sicuramente trovare la somma esplicita di $f(z)$. Riuscite a calcolare anche la somma di $F(z)$?

(6) Dimostrate che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ è convergente su tutti i punti del cerchio unitario eccetto $z = 1$. (Consiglio: utilizzate il secondo esercizio).

(7) Dimostrate che la serie $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n(n+1)}$ ha raggio di convergenza $R = 1$. Dimostrate inoltre che la serie converge su tutti i punti del cerchio unitario. Riuscite a calcolare f esplicitamente? E' estendibile in maniera olomorfa a tutto il cerchio unitario? Fin dove riuscite a estendere f in maniera olomorfa? Cosa succede nel punto $z = 1$?

(8) Dite se secondo voi la seguente affermazione è vera e provate a giustificare la risposta: "Se una serie ha raggio di convergenza R ed essa converge in <u>ogni punto</u> del cerchio di raggio R allora è estendibile olomorficamente a un aperto contentente $\overline{B(0, R)}$".

(9) Provate a inventarvi una serie che ha raggio di convergenza $R = 1$ e che sia convergente su tutti i punti del cerchio unitario eccetto che su un'insieme finto di punti arbitario. (Consiglio: pensate a quello che avete imparato con gli esercici (3)-(6)).

(10) Nel caso delle funzioni reali, esiste una funzione f, non identicamente nulla in un intorno di $t = 0$, e tale che $f^{(k)}(0) = 0$ per tutti i $k \in \mathbb{N}$. Ad esempio la funzione

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2} & \text{quando } t \geq 0 \\ 0 & \text{quando } t < 0. \end{cases}$$

Riuscite a trovare una funzione olomorfa f che soddisfi la stessa proprietà? Perchè?