Esercizi su mappe conformi e trasformazioni di Möbius.

Diego Matessi.

Versione del 8 Dicembre 2005

(1) Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione analitica definita su un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Se $f = u + iv$ e

$$Df = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_x v \\ \partial_y u & \partial_y v \end{pmatrix}.$$

Dimostrare che per ogni $z \in \Omega$

$$\det Df(z) = |f'(z)|^2.$$

(2) Sia $N = (0, 0, 1)$ il polo nord della sfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ e sia $\pi : S^2 - N \to \mathbb{R}^2$ la proiezione stereografica. Sia $J : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ la funzione $J(z) = z^{-1}$. Identificando $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ mediante $x + iy \mapsto (x, y)$, si consideri la mappa $\pi^{-1} J \pi : (S^2 - \{N, S\}) \to (S^2 - \{N, S\})$, dove $S = (0, 0, -1)$. Si dimostri che $\pi^{-1} J \pi$ si estende ad una trasformazione continua di S^2. Si dimostri analogamente che anche le omotetie e le traslazioni corrispondono a trasformazioni continue della sfera. Dedurne che tutte le trasformazioni di Möbius corrispondono a trasformazioni della sfera.

(3) Dato un $\alpha \in [0, 2\pi)$, trovare l'equazione di una curva $\gamma_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ con la seguente proprietà: per ogni $t \in \mathbb{R}$, l'angolo formato dalla tangente a γ_α nel punto $\gamma(t)$ e la semiretta con origine in 0 e passante per $\gamma(t)$ è uguale a α. Disegnare γ_α per qualche valore di α. (Suggerimento: usare la funzione esponenziale astutamente.)

(4) Sia T la funzione

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ e c, d non entrambi nulli. Dimostrare che T è iniettiva se e soltanto se $ad - cb \neq 0$ e che se $ad - bc = 0$ allora T è costante.

(5) Sia $H = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ il semipiano superiore. Dimostrare che una trasformazione di Möbius

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

manda H in sé stesso biiettivamente se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tale che $\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d \in \mathbb{R}$ e $\lambda^2(ad - cb) = 1$. Sia $\mathcal{M}_H$ l'insieme delle trasformazioni di Möbius che mandano H in sé stesso biiettivamente. Dimostrare che $\mathcal{M}_H$ è un gruppo e darne una descrizione simile a quella data per $\mathcal{M}$.

(6) Sia $T \in \mathcal{M}_H$. Dimostrare che ogni semicerchio contenuto in H, che interseca ortogonalmente l'asse reale, viene mandato in un semicerchio con la stessa proprietà, oppure in una semiretta verticale. Determinare per quali semicerchi accade l'una o l'altra delle due possibilità.

(7) Sia D il disco unitario in $\mathbb{C}$. Trovare una trasformazione di Möbius T che mandi D in H biiettivamente.

(8) Si determinino tutte le trasformazioni di Möbius che mandano D in sé stesso biiettivamente.

(9) Si dimostri che ogni trasformazione di Möbius $T : \mathbb{C} \cup \infty \to \mathbb{C} \cup \infty$ ha almeno un punto fisso (ovvero che soddisfa $T(z) = z$) e che se ne ha più di due allora è l'identità. Si trovi un'esempio di trasformazione di Möbius con un solo punto fisso diverso da ∞. Quali sono quelle che hanno solo ∞ come punto fisso?

(10) Sia

$$T(z) = \frac{z}{z+1}.$$

verificare che l'unico punto fisso di T è 0. Si dimostri che T manda cerchi passanti per 0 e tangenti alla retta $\{x = 0\}$ in cerchi o rette con la stessa proprietà. Dato $r \in \mathbb{R}$, sia C il cerchio di raggio $|r|$ e centro r, si dermini $T(C)$. Cosa accade dei cerchi passanti per 0 e tangenti a $\{y = 0\}$?

(11) Trovare un sottogruppo S del gruppo $\mathcal{M}$ delle trasformazioni di Moebius che sia isomorfo al gruppo S_3 delle permutazioni di 3 elementi.

(12) Si consideri la trasformazione di Möbius

$$T(z) = \frac{z}{z-1}.$$

Sia γ_α la curva descritta nell'Esercizio 3. Si disegni la curva $\sigma_\alpha = T \circ \gamma_\alpha$ per qualche valore di α (ad esempio $\alpha = \pi/4$).

(13) Sia C il cerchio di centro -3 e raggio 2 e sia D il cerchio di centro 1 e raggio 1. Si trovi una trasformazione di Möbius T che manda l'esterno del cerchio D biiettivamente nell'interno del cerchio C.