Prova parziale di $\mathcal{MATEMATICA\ II}$		17 Maggio 2018
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 1

Si consideri l'omomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definito da

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, 2x_1 - x_2 - x_3, x_2 - x_3, x_1 - x_3)$$

Determinare:

a. la matrice associata all'omomorfismo rispetto alla base canonica $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$;

b. una base del nucleo e una base dell'immagine di f.

Tempo suggerito: 20 minuti
Punteggio: 17 punti

Prova scritta di $\mathcal{MATEMATICA\ II}$		17 Maggio 2018
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 2

Determinare i massimi e i minimi relativi della funzione

$$f(x, y) = x^3 - 6x + 4y + y^2$$

Tempo suggerito: 25 minuti
Punteggio: 16 punti

SOLUZIONE 1:

a. la matrice richiesta è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b. Applicando il metodo di Gauss alla matrice si ha:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{\xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - R_1}}{\xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per cui a ritroso si ha $x_3 = t; x_2 = t; x_1 = t$ e quindi $ker(f) = \mathcal{L}((1,1,1)); Im(f) = \mathcal{L}((1,2,0,1),(0,-1,1,0))$.

SOLUZIONE 2:

$f_x(x,y) = 3x^2 - 6; f_y(x,y) = 4 + 2y$ che si annullano per $x = \mp\sqrt{2}; y = -2$ quindi i punti stazionari sono $(-\sqrt{2},-2)$ e $(\sqrt{2},-2)$.

$f_{xx}(x,y) = 6x; f_{xy}(x,y) = 0; f_{yx}(x,y) = 0; f_{yy}(x,y) = 2$, quindi:

$H(-\sqrt{2},-2) = \begin{pmatrix} -6\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ che ha autovalori discordi, quindi $(-\sqrt{2},-2)$ è un punto di sella.

$H(\sqrt{2},-2) = \begin{pmatrix} 6\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ che ha autovalori concordi positivi, quindi $(\sqrt{2},-2)$ è un punto di minimo.