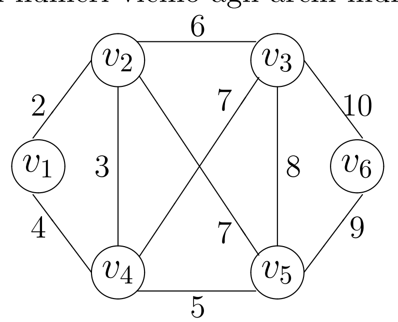
Prova scritta di $\mathcal{MATEMATICA\ II}$		19 giugno 2018
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 1
(per chi fa la terza prova parziale)

Si consideri il grafo non orientato (i numeri vicino agli archi indicano il costo):



Determinare un albero ricoprente di costo minimo, con l'algoritmo di Prim, a partire dal nodo v_1.

Tempo suggerito: 20 minuti
Punteggio: 16 punti

Prova scritta di $\mathcal{MATEMATICA\ II}$		19 giugno 2018
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 2
(per tutti)

Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} 2y''(x) - 3y'(x) + y(x) = x^2 - 1 \\ y'(0) = 4 \\ y''(0) = -1 \end{cases}$$

Tempo suggerito: 25 minuti
Punteggio: 17 punti

Prova scritta di $\mathcal{MATEMATICA\ II}$		19 giugno 2018
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non è consentito consegnare fogli di brutta.

Esercizio 3
(per chi fa la prova scritta)

a. Dire se l'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 - x_2, x_2 - x_3)$$

è un omomorfismo.

b. Dire se l'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_1 - x_2)$$

è un omomorfismo.

Tempo suggerito: 20 minuti
Punteggio: 13 punti

SOLUZIONE 1: L'algoritmo genera i seguenti alberi:

0 $A' = \emptyset; N' = \{v_1\}$

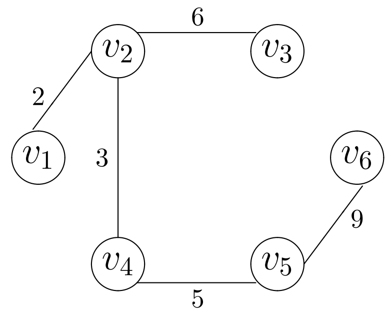
I $A' = \{a_{12}\}; N' = \{v_1, v_2\}$

II $A' = \{a_{12}, a_{24}\}; N' = \{v_1, v_2, v_4\}$

III $A' = \{a_{12}, a_{24}, a_{45}\}; N' = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$

IV $A' = \{a_{12}, a_{24}, a_{45}, a_{23}\}; N' = \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_3\}$

V $A' = \{a_{12}, a_{24}, a_{45}, a_{23}, a_{56}\}; N' = \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_3, v_6\}$; STOP $(N' = N)$



SOLUZIONE 2:
È un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti; le radici del polinomio caratteristico sono $\frac{1}{2}$ e 1 per cui la soluzione generale dell'omogenea è $Y_0(x) = c_1 e^{\frac{x}{2}} + c_2 e^x$.
Per la soluzione particolare si può provare con un polinomio di secondo grado $\overline{y}(x) = k_2 x^2 + k_1 x + k_0$, con $\overline{y}'(x) = 2k_2 x + k_1$ e $\overline{y}"(x) = 2k_2$. Sostituendo nell'equazione data si ricavano $k_2 = 1, k_1 = 6, k_0 = 13$ da cui $\overline{y}(x) = x^2 + 6x + 13$.
Sostituendo le condizioni iniziali nelle derivate della soluzione generale $y(x) = c_1 e^{\frac{x}{2}} + c_2 e^x + x^2 + 6x + 13$ si ricavano $c_1 = 4, c_2 = -4$ e quindi la soluzione è $y(x) = 4e^{\frac{x}{2}} - 4e^x + x^2 + 6x + 13$.

SOLUZIONE 3:

a. $f(2(1,0,0)) = f((2,0,0)) = (4,0) \neq (2,0) = 2(1,0) = 2f((1,0,0))$, quindi non è un omomorfismo.

b. $f(\lambda(x,y)) = f((\lambda x, \lambda y)) = (\lambda x, \lambda y, \lambda x - \lambda y) = \lambda(x, y, x - y) = \lambda f((x,y))$.
$f((x,y) + (w,z)) = f((x+w, y+z)) = (x+w, y+z, x+w-(y+z)) = (x,y,x-y) + (w,z,w-z) = f((x,y)) + f((w,z))$. Quindi è un omomorfismo.