

Prova scritta di <i>MATEMATICA II</i>		18 Giugno 2019
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
Non verranno corretti esercizi su fogli diversi da questi.

Esercizio 1
(per tutti)

Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} (x^2 - 3)y'(x) = 2x(y(x) - 1) \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Tempo suggerito: 25 minuti

Punteggio: 15 punti

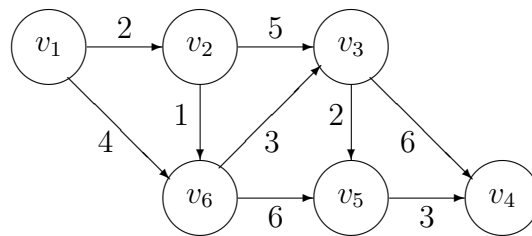
Prova scritta di <i>MATEMATICA II</i>		18 Giugno 2019
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
Non verranno corretti esercizi su fogli diversi da questi.

Esercizio 2

(per chi fa la terza prova parziale)

Si consideri il seguente grafo orientato, in cui i numeri indicano il costo degli archi:



Determinare i cammini di costo minimo da v_1 a tutti gli altri nodi, utilizzando l'algoritmo di Dijkstra.

Tempo suggerito: 25 minuti

Punteggio: 18 punti

Prova scritta di <i>MATEMATICA II</i>		18 Giugno 2019
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
Non verranno corretti esercizi su fogli diversi da questi.

Esercizio 3

(per chi fa la prova scritta)

Determinare una base di $Ker f$ e $Im f$ dell'omomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Tempo suggerito: 25 minuti

Punteggio: 15 punti

SOLUZIONE 1:

$$\frac{y'(x)}{y(x)-1} = \frac{2x}{x^2-3} \rightarrow \int_0^{y(x)} \frac{dz}{z-1} = - \int_1^x \frac{2sds}{s^2-3}$$

da cui $[lg|z-1|]_0^{y(x)} = [lg|s^2-3|]_1^x \rightarrow |y(x)-1| = \left| \frac{x^2-3}{2} \right|$

Quindi $y(x) = \frac{x^2-1}{2}$ con $x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

La soluzione $y(x) = -\frac{x^2-5}{2}$ si scarta per le condizioni iniziali.

SOLUZIONE 2:

	1	2	3	4	5	6		1	2	3	4	5	6	
d	0	99	99	99	99	99	pred	1	1	1	1	1	1	h = 1
d	0	2	99	99	99	4	pred	1	1	1	1	1	1	h = 2
d	0	2	7	99	99	3	pred	1	1	2	1	1	2	h = 6
d	0	2	6	99	9	3	pred	1	1	6	1	6	2	h = 3
d	0	2	6	12	8	3	pred	1	1	6	3	3	2	h = 5
d	0	2	6	11	8	3	pred	1	1	6	5	3	2	h = 4
STOP														

SOLUZIONE 3:

Riducendo la matrice si ha:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\underline{R_4 \leftarrow R_4 - R_1}]{\substack{\underline{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \\ \underline{R_3 \leftarrow R_3 - R_1}}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\underline{R_4 \leftarrow R_4 + R_2}]{\underline{R_3 \leftarrow R_3 - R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui

$$Ker f = \mathcal{L}((1, 0, 1)); Im f = \mathcal{L}((1, 2, 1, 1), (2, 5, 3, 1))$$