Prova scritta di $\mathcal{MATEMATICHE}$ $\mathcal{I} - \mathcal{II}$ $\mathcal{B}$		25 Settembre 2018
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non verranno corretti esercizi su fogli diversi da questi.

Esercizio 1

Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 definito sul campo $\mathbb{R}$, con le usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare. Determinare se l'applicazione $f : V \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definita da:

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + b, c + d)$$

è un omomorfismo.

Tempo suggerito: 25 minuti
Punteggio: 15 punti

Prova scritta di $\mathcal{MATEMATICHE\ I - II\ B}$		25 Settembre 2018
Cognome:	Nome:	Matricola:

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non verranno corretti esercizi su fogli diversi da questi.

Esercizio 2

Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x^2 y'(x) = y(x)^2 \\ y(-1) = 2 \end{cases}$$

Tempo suggerito: 20 minuti
Punteggio: 15 punti

SOLUZIONE 1:
L'applicazione f conserva la somma:

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = (a+b, c+d) + (a'+b', c'+d') = (a+b+a'+b', c+d+c'+d') =$$

$$(a+a'+b+b', c+c'+d+d') = f\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$

L'applicazione f conserva il prodotto per scalari:

$$f\left(k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix} = (ka+kb, kc+kd) = k(a+b, c+d) = kf\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

quindi f è un omomorfismo.

SOLUZIONE 2:
E' un'equazione a variabili separabili.

$$\frac{y'(x)}{y(x)^2} = \frac{1}{x^2} \longrightarrow \int_2^{y(x)} \frac{1}{z^2} dz = \int_{-1}^{x} \frac{1}{s^2} ds \longrightarrow \left[-\frac{1}{z}\right]_2^{y(x)} = \left[-\frac{1}{s}\right]_{-1}^{x} \longrightarrow -\frac{1}{y(x)} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{x} - 1$$

da cui $y(x) = \dfrac{2x}{2+3x}$ con $x < -\dfrac{2}{3}$.