| **Prova scritta di** $\mathcal{MATEMATICHE\ I\ E\ II\ -\ MOD\ B}$ | | 9 Luglio 2019 |
|---|---|---|
| Cognome: | Nome: | Matricola: |

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non verranno corretti esercizi su fogli diversi da questi.

## Esercizio 1

Determinare una base per ciascuno degli autospazi dell'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definito dalla seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dire se l'endomorfismo è semplice.

*Tempo suggerito: 25 minuti*
*Punteggio: 15 punti*

| **Prova scritta di** $\mathcal{MATEMATICHE\ I\ E\ II\ -\ MOD\ B}$ | | 9 Luglio 2019 |
|---|---|---|
| Cognome: | Nome: | Matricola: |

- Giustificare adeguatamente le soluzioni e riportare i calcoli.
  Non verranno corretti esercizi su fogli diversi da questi.

## Esercizio 2

Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D x^2 + y \; dxdy$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^2\}$.

*Tempo suggerito: 25 minuti*
*Punteggio: 15 punti*

SOLUZIONE 1:
Il polinomio caratteristico è dato dal determinante della matrice:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -4 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & -1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

cioè $(-1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-3)$ che ha radici $-1,-1,3$.
L'autospazio $V_{-1}$ corrisponde al nucleo dell'omomorfismo associato alla matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Applicando il metodo di Gauss si ha:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - R_1]{R_2 \leftarrow R_2 + 1/2 R_1} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per cui si ha $x_3 = t; x_2 = 0; x_1 = 0$ e quindi $V_{-1} = \mathcal{L}(0,0,1)$.
L'autospazio $V_3$ corrisponde al nucleo dell'omomorfismo associato alla matrice:

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Applicando il metodo di Gauss si ha:

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 + R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 1/2 R_1} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per cui si ha $x_3 = t; x_2 = -\frac{4}{5}t; x_1 = \frac{8}{5}t$ e quindi $V_3 = \mathcal{L}(8,-4,5)$.
L'endomorfismo non è semplice poiché per l'autovalore $\lambda = -1$ la molteplicità algebrica è 2 e quella geometrica è 1.

SOLUZIONE 2:

$$\int_0^2 \left( \int_0^{x^2} x^2 + y \, dy \right) dx = \int_0^2 \left[ x^2 y + \frac{y^2}{2} \right]_0^{x^2} dx = \frac{3}{2} \int_0^2 x^4 dx = \frac{3}{2} \left[ \frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \frac{48}{5}$$