Indice

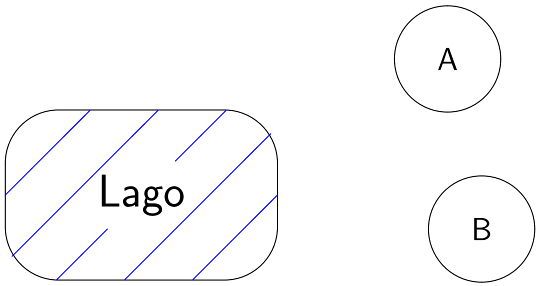
1 Introduzione

1.1 Esempio preliminare (da Young)

Due paesi A e B, aventi rispettivamente 3.600 e 1.200 abitanti, vogliono costruire un acquedotto attingendo allo stesso lago

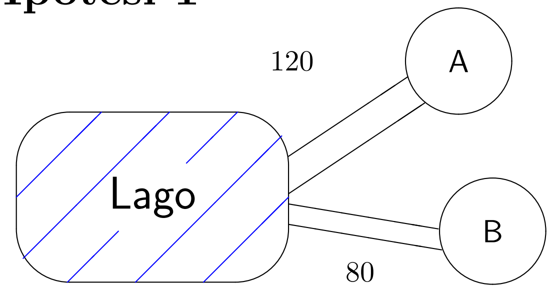
Modello di programmazione matematica

min *Spesa di costruzione*
s.t. *Collegare A al lago*
Rispettare le specifiche di A
Collegare B al lago
Rispettare le specifiche di B

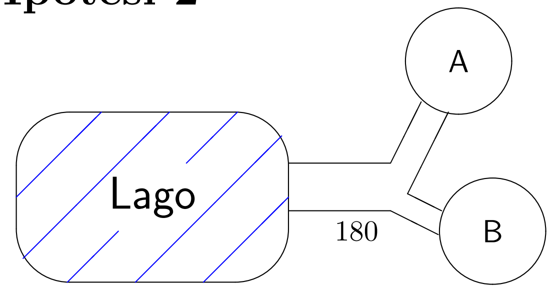


Le soluzioni ammissibili possono essere raggruppate in due sottoinsiemi che corrispondono alle ipotesi 1 e 2

Ipotesi 1



Ipotesi 2



La soluzione ottimale è:

$$x^* = \textit{ipotesi 2}$$

$$z^* = \textit{180}$$

La soluzione è attuabile se i paesi sono disponibili ad accordarsi per una realizzazione in comune, ma è necessario stabilire come ripartire la spesa

	Criterio	*A*	*B*
1	*Uguale divisione dei costi tra i paesi*	*90*	*90*
2	*Uguale divisione dei costi tra gli abitanti*	*135*	*45*
3	*Uguale divisione del risparmio tra i paesi*	*110*	*70*
4	*Uguale divisione del risparmio tra gli abitanti*	*105*	*75*
5	*Divisione dei costi (e del risparmio) in proporzione all'acquedotto singolo*	*108*	*72*

Il criterio 1 è il più vantaggioso per il paese A ma è rifiutato dal paese B

Il criterio 2 è il più vantaggioso per il paese B ma è rifiutato dal paese A

Gli altri criteri risultano più o meno vantaggiosi per i due paesi ma nessuno dei due può rifiutarne a priori qualcuno (A preferisce il criterio 4 e B preferisce il criterio 3)

La programmazione matematica non fornisce una metodologia di scelta; la Teoria dei Giochi non fornisce "la" soluzione, ma propone una soluzione (*solution concept*)

1.2 Introduzione

La Teoria dei Giochi tratta le situazioni in cui il risultato dipende dalle scelte fatte da più persone, dette *giocatori*, che operano perseguendo obiettivi che possono risultare comuni, ma non identici, differenti ed eventualmente contrastanti; possono essere presenti anche aspetti aleatori

Il nome deriva da *Theory of Games and Economic Behavior* di von Neumann e Morgenstern (1944)

Esempio 1.1 (Dilemma del prigioniero)

I/II	C	NC
C	$-5, -5$	$-1, -6$
NC	$-6, -1$	$-2, -2$

$\diamondsuit$

Esempio 1.2 (Battaglia dei sessi)

I/II	T	P
T	$2, 1$	$0, 0$
P	$0, 0$	$1, 2$

$\diamondsuit$

Esempio 1.3 (Puro coordinamento)

I/II	T	P
T	$1, 1$	$0, 0$
P	$0, 0$	$1, 1$

$\diamondsuit$

- Nell'Esempio 1.2 (e soprattutto nel 1.3) una telefonata, un accordo al 50 per cento o una strategia correlata possono risolvere facilmente il problema
- Nell'Esempio 1.1 la possibilità di comunicare renderebbe probabile un accordo per la strategia NC, ma al momento della decisione sia I che II risceglierebbero C, poichè $-1 > -2$

Classificazione di Harsanyi (1966):

Giochi non cooperativi	Non sono possibili accordi vincolanti tra i giocatori
Giochi cooperativi	Sono possibili accordi vincolanti tra i giocatori

- Talvolta si preferisce assumere, più restrittivamente, che in un gioco non cooperativo i giocatori non possano nemmeno comunicare in quanto ciò potrebbe alterare il risultato, ma resta il caso in cui possono comunicare ma non sottoscrivere accordi vincolanti
- I giochi cooperativi sono divisi in due sottoclassi: giochi a utilità non trasferibile (NTU) o senza pagamenti laterali, e giochi a utilità trasferibile (TU) o a pagamenti laterali, che costituiscono un caso particolare dei giochi NTU

1.3 Rappresentazione di un gioco

Le tre forme più importanti sono:

- forma estesa - von Neumann (1928) e Kuhn (1953)
- forma strategica - Shubik (1982); forma normale - von Neumann e Morgenstern (1944)
- forma caratteristica - von Neumann e Morgenstern (1944); solo per i giochi cooperativi

Definizione 1.1

- *Si chiama strategia di un giocatore una funzione che assegna al giocatore una mossa per ogni possibile situazione del gioco*
- *Si chiama funzione dei pagamenti (payoff) una funzione che assegna ad ogni giocatore la sua vincita per ogni possibile terminazione del gioco*

La strategia è un “piano di azione” che individua in ogni situazione del gioco una “mossa” tra le tante possibili

1.4 Forma estesa

Descrizione puntuale del gioco, delle mosse e delle relative probabilità, della situazione dopo ogni mossa, delle strategie, degli insiemi di informazione (insiemi di nodi che globalmente rappresentano la situazione di un giocatore), ecc.; risulta molto ricca ma poco maneggevole

Si utilizza una rappresentazione ad albero in cui:

nodi	possibili situazioni del gioco
archi uscenti da un nodo	possibili mosse del giocatore chiamato a muovere
nodi terminali	valori delle vincite (payoff) di ciascun giocatore

1.5 Forma strategica

$2n$-upla $(\sum_1, \sum_2, \ldots, \sum_n, f_1, f_2, \ldots, f_n)$ dove:

$\sum_1, \sum_2, \ldots, \sum_n$ insiemi non vuoti delle possibili strategie di ogni giocatore

$f_1, f_2, \ldots, f_n$ funzioni reali $f_i : \prod_{k=1,\ldots,n} \Sigma_k \to \mathbb{R}, \qquad i = 1, .., n$

- Tutti i giocatori scelgono contemporaneamente la loro strategia e la f_i dice quale è il guadagno del giocatore i determinato dalle scelte fatte
- E' possibile passare dalla forma estesa a quella strategica (il passaggio inverso è più complesso)
- Gli elementi della forma strategica possono essere riassunti in una tabella come negli esempi precedenti
- Se il gioco è a due giocatori si parla di *gioco a matrice doppia* o *bimatrice*

1.6 Forma caratteristica

Può essere usata solo per i giochi cooperativi

Definizione 1.2

- *Detto N l'insieme dei giocatori, ogni sottoinsieme S di N è detto coalizione. Se $S = N$ si ha la grande coalizione*
- *Si dice funzione caratteristica di un gioco ad n giocatori una funzione indicata solitamente con v (se il gioco è senza pagamenti laterali si usa V ed è più complessa) per cui si ha:*

$$v : 2^N \to \mathbb{R} \text{ con } v(\varnothing) = 0$$

- v assegna ad S la massima vincita possibile indipendentemente dal comportamento degli altri giocatori
- Un gioco descritto tramite la funzione caratteristica è detto in *forma caratteristica* o *coalizionale*
  La funzione caratteristica e il gioco possono essere identificati

Esempio 1.4 (Maggioranza semplice)

Tre giocatori vogliono conseguire un risultato; se almeno due di essi si uniscono raggiungono il loro obiettivo. Questa situazione può essere rappresentata dal seguente gioco:

$N = \{1, 2, 3\}$

$v(\varnothing) = v(1) = v(2) = v(3) = 0; v(1,2) = v(1,3) = v(2,3) = v(1,2,3) = 1$ ♢

La descrizione del gioco è molto "povera", in quanto non permette di definire la vincita di ogni singolo giocatore della coalizione, ma solo la vincita complessiva

La forma estesa contiene più informazione sul gioco rispetto alla forma strategica, che risulta comunque sufficiente a rappresentare un gioco

Ci sono altre rappresentazioni, tra cui la *partition function form* (Thrall and Lucas, 1963), anch'essa utilizzabile solo per i giochi cooperativi

In questo caso si tiene conto anche del comportamento dei giocatori al di fuori di una coalizione, cioè il payoff di una coalizione dipende da cosa fanno gli altri giocatori

Definizione 1.3 *Un gioco in partition function form è una tripla* $(N, \mathcal{K}, \{v_K\}_{K\in\mathcal{K}})$ *dove* N *è l'insieme dei giocatori,* $\mathcal{K}$ *è l'insieme di tutte le strutture di coalizione su* N*, cioè tutte le possibili partizioni, e per ogni* $K \in \mathcal{K}$*,* v_K *è una funzione di ripartizione che assegna ad ogni coalizione* $S \in K$ *il suo valore* $v_K(S)$

Esempio 1.5 (Voto di maggioranza relativa)

Cinque agenti devono eleggere un rappresentante tra di loro; viene eletto chi ottiene più voti

Una coalizione di due agenti può risultare vincente o meno a seconda di cosa fanno gli altri:

$\mathcal{K}_1 = \{\{1,2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}; v_K(\mathcal{K}_1) = (1,0,0,0)$

$\mathcal{K}_2 = \{\{1,2\},\{3,4,5\}\}; v_K(\mathcal{K}_2) = (0,1)$ $\diamondsuit$

1.7 Soluzione di un gioco (Solution concept)

Risolvere un gioco consiste nel fornire delle indicazioni ad uno o più giocatori, eventualmente tutti, su:

- strategie da adottare se il gioco è non cooperativo o cooperativo ad utilità non trasferibile
- suddivisione della vincita se il gioco è cooperativo ad utilità trasferibile

Le indicazioni non possono essere assolute in quanto bisogna tenere conto di fattori aleatori, o legati a preferenze e sensazioni del singolo giocatore. Un "concetto di soluzione" indica quella che secondo alcuni criteri assoluti è una scelta che può risultare accettabile a tutti i giocatori secondo i loro criteri soggettivi

Nell'esempio della battaglia dei sessi contano "egoismo", "altruismo" e situazioni precedenti

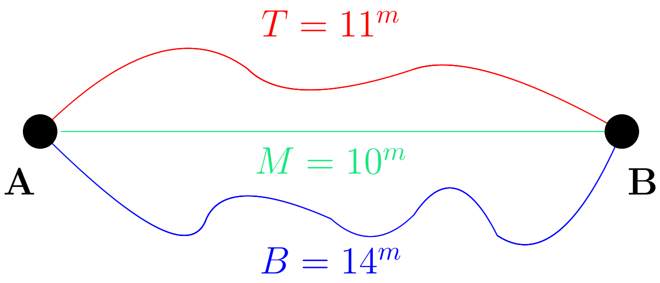
Esempio 1.6 (Divisione di una torta tra due giocatori)
È uno dei problemi più significativi: molto semplice, molto comune e molto complesso
La soluzione più usuale, uno taglia e l'altro sceglie, non è equa in quanto può favorire chi sceglie se chi taglia non è preciso, o chi taglia se è a conoscenza di qualche preferenza o "punto debole" di chi sceglie $\diamondsuit$

2 Giochi non cooperativi

2.1 Introduzione

I giocatori non possono stipulare accordi vincolanti (o comunicare), indipendentemente dall'avere interesse ad accordarsi

Esempio 2.1 (Congestione)
I tempi di percorrenza da $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *dipendono dalla lunghezza della strada e dal traffico*
Se una strada è scelta da due utenti il tempo aumenta di due minuti
Se è scelta dai tre utenti il tempo aumenta di cinque minuti
L'obiettivo dei giocatori è comune, ma non identico (ognuno vuole minimizzare il proprio tempo di percorrenza)
La cooperazione (nel caso reale) è impossibile per la difficoltà di accordarsi



$III = T$			
I/II	T	M	B
T	$16, 16, 16$	$13, 10, 13$	$13, 14, 13$
M	$10, 13, 13$	$12, 12, 11$	$10, 14, 11$
B	$14, 13, 13$	$14, 10, 11$	$16, 16, 11$

$III = M$			
I/II	T	M	B
T	$13, 13, 10$	$11, 12, 12$	$11, 14, 10$
M	$12, 11, 12$	$15, 15, 15$	$12, 14, 12$
B	$14, 11, 10$	$14, 12, 12$	$16, 16, 10$

$III = B$			
I/II	T	M	B
T	$13, 13, 14$	$11, 10, 14$	$11, 16, 16$
M	$10, 11, 14$	$12, 12, 14$	$10, 16, 16$
B	$16, 11, 16$	$16, 10, 16$	$19, 19, 19$

$\diamondsuit$

2.2 Equilibrio di Nash (1950)

E' il più semplice e importante concetto di soluzione per un gioco non cooperativo

Definizione 2.1 *Dato un gioco G si dice che la n-upla di strategie $(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_n^*)$ con $\sigma_i^* \in \Sigma_i$ costituisce un equilibrio, o è in equilibrio, se nessun giocatore ha interesse ad essere l'unico che cambia strategia, cioè se:*

$$f_i(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_i^*, \ldots, \sigma_n^*) \geq f_i(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_i, \ldots, \sigma_n^*), \ \sigma_i \in \Sigma_i, \ i \in N$$

Limiti dell'equilibrio di Nash:

- inefficienza (Dilemma del prigioniero)
- non unicità (Battaglia dei sessi, Puro coordinamento, Congestione $\rightarrow$ Raffinamenti)
- non esistenza ($\rightarrow$ Strategie miste)

Esempio 2.2 (Head-Tail)

I/II	H	T
H	$-1, 1$	$1, -1$
T	$1, -1$	$-1, 1$

$\diamondsuit$

Tra i numerosi raffinamenti si possono citare:

- *Equilibrio perfetto nei sottogiochi*, correlato alla programmazione dinamica di Bellman (Selten, 1965)
- *Correlated equilibrium*, che richiede la possibilità di comunicare tra i giocatori (Aumann, 1974)
- *Equilibrio perfetto* o "equilibrio della mano tremante", che tiene conto della possibilità di perturbazioni (Selten, 1975)

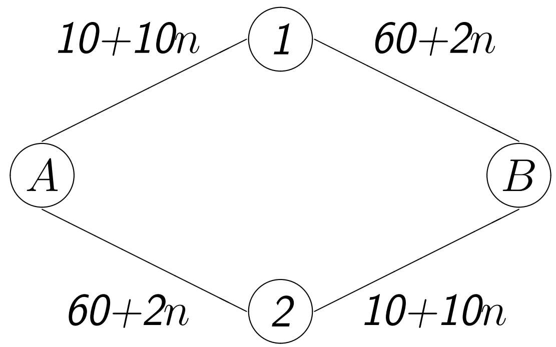
Tutti i raffinamenti hanno fallito sia sulla unicità che sull'efficienza

Definizione 2.2 *Una strategia mista di un giocatore è una distribuzione di probabilità sull'insieme delle sue strategie (pure)*

Dimostrare che ((0.5,0.5),(0.5,0.5)) è un equilibrio di Nash in strategie miste per l'Esempio 2.2

Esempio 2.3 (Paradosso di Pigou) *6 utenti devono spostarsi da A a B e possono utilizzare due strade, $A-1-B$ e $A-2-B$*

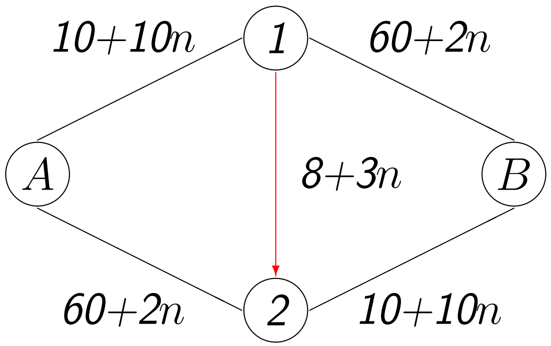
La percorrenza di ogni tratto ha un tempo fisso e un fattore di congestione



La soluzione ottimale si ottiene quando ogni strada è percorsa da tre utenti, con tempo di percorrenza $10 + 10 \times 3 + 60 + 2 \times 3 = 106$

Questa soluzione è anche un equilibrio di Nash

Costruendo una strada a senso unico che collega 1 *e* 2, *con tempo fisso* 8 *e fattore di congestione* $3n$



Un utente di $A-1-B$ *ha interesse a passare su* $A-1-2-B$ *con tempo* $10+10\times3+8+3\times1+10+10\times4=101$
I due utenti su $A-1-B$ *impiegano* $10+10\times3+60+2\times2=104$, *mentre i tre su* $A-2-B$ *impiegano* $60+2\times3+10+10\times4=116$
Se un utente di $A-2-B$ *passa su* $A-1-2-B$ *il suo tempo diventa* $10+10\times4+8+3\times2+10+10\times4=114$, *uguale al tempo degli altri, che è peggiore del tempo senza la strada* $1-2$
La nuova soluzione è ancora un equilibrio di Nash
Ovviamente gli utenti potrebbero tornare alla configurazione precedente, che perè adesso risulta instabile $\diamondsuit$

3 Giochi cooperativi

3.1 Introduzione

I giocatori possono associarsi per migliorare il proprio risultato
Per realizzare la cooperazione:

- deve essere possibile stipulare accordi (ad esempio non devono esserci regole antitrust o difficoltà di comunicazione)
- deve esserci la possibilità di far rispettare tali accordi, nel senso che deve esistere una autorità sufficientemente forte e accettata da tutti i componenti

Si distinguono due sottoclassi:

- Giochi cooperativi senza pagamenti laterali (NTU-Games)
  i giocatori ricevono un payoff assegnato
- Giochi cooperativi a pagamenti laterali (TU-Games)
  i giocatori di una coalizione possono ripartirsi in qualsiasi modo la vincita

I secondi costituiscono un caso particolare dei primi

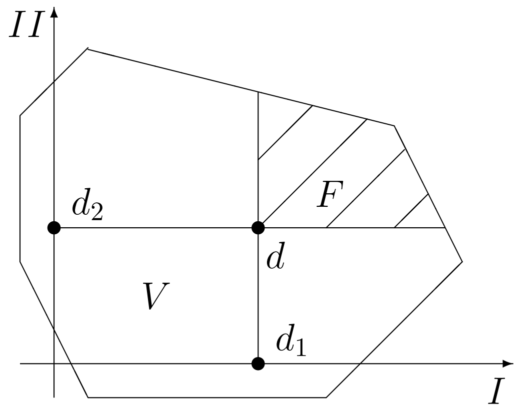
3.2 Giochi cooperativi senza pagamenti laterali

Introdotti da Aumann e Peleg (1960); ogni giocatore utilizza le proprie strategie in accordo con gli altri giocatori con cui ha formato una coalizione, ma consegue una sua propria vincita indipendentemente dagli altri

Definizione 3.1 *Un gioco NTU è una coppia $G = (N, V)$ dove N è l'insieme dei giocatori e V è la funzione che ad ogni coalizione $S \subset N$ associa l'insieme dei payoff ammissibili per i giocatori di S, tale che:*

- $V(S) \subset \mathbb{R}^S$
- $V(S)$ *è chiuso e non vuoto*
- $V(S) = V(S) - \mathbb{R}^S_{\geq}$ (comprehensiveness)

3.3 Problema di contrattazione a due giocatori senza pagamenti laterali



E' una applicazione dei giochi cooperativi senza pagamenti laterali (Nash, 1950)
I giocatori possono accordarsi per una strategia correlata e possono giocare qualunque elemento dello spazio delle strategie $\Sigma_I \times \Sigma_{II}$
Sotto opportune ipotesi di compattezza dell'insieme delle strategie possibili (ad esempio un simplesso) e di comportamento delle funzioni di utilità (ad esempio lineari), l'immagine nello spazio delle utilità $I \times II$ è un insieme V convesso e chiuso

Al giocatore i si assegna un valore di riferimento d_i, ad esempio la soluzione non cooperativa di maxmin, quella di Nash o altro, e si definisce il punto $d = (d_1, d_2)$ (*disagreement point*); si considera il sottoinsieme $F = V \cap \{(x_1, x_2) | x_1 \geq d_1, x_2 \geq d_2\}$ chiuso, convesso, limitato e non vuoto (*feasibility set*)

Definizione 3.2 *Un problema di contrattazione a due giocatori è rappresentato dalla coppia* (F, d) *con* $F \subset \mathbb{R}^2$ *e* $d = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2$

E' interessante il caso di giocatori antagonisti (frontiera di Pareto = giocatori efficientisti)

Gioco NTU :

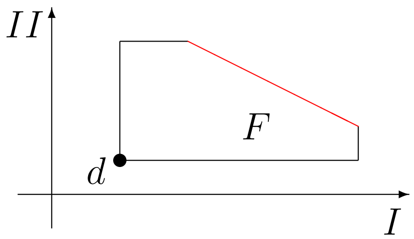
- $V(1) = \{x_1 \in \mathbb{R} | x_1 \leq d_1\}$
- $V(2) = \{x_2 \in \mathbb{R} | x_2 \leq d_2\}$
- $V(1, 2) = F - \mathbb{R}^2_{\geq}$

3.3.1 Soluzione assiomatica di Nash (1950)

Una soluzione $\Phi(F,d)$ di un problema di contrattazione (F,d) è una funzione $\Phi : C \to \mathbb{R}^2$, con C insieme dei problemi di contrattazione, tale che $\Phi(F,d) \in F$ e che soddisfa i seguenti requisiti detti *assiomi di Nash*:

1. Efficienza stretta

$$x \in F, x \geq \Phi(F,d) \Rightarrow x = \Phi(F,d)$$



2. Razionalità individuale

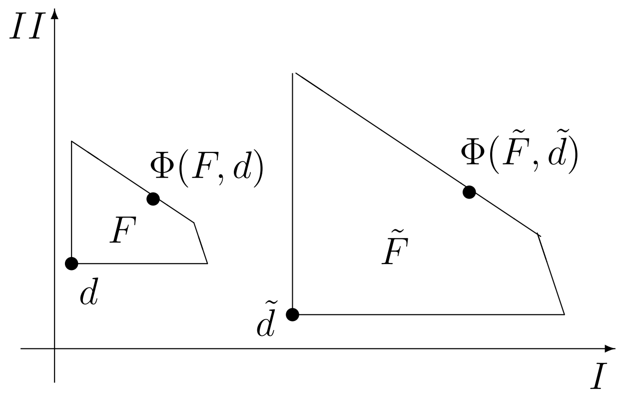
$$\Phi(F,d) \geq d$$

con la relazione d'ordine di $\mathbb{R}^2$

3. Scale covariance

Per ogni $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_>$ e per ogni $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ siano $\tilde{F} = \{(\lambda_1 x_1 + \mu_1, \lambda_2 x_2 + \mu_2) \mid (x_1, x_2) \in F\}$ e $\tilde{d} = (\lambda_1 d_1 + \mu_1, \lambda_2 d_2 + \mu_2)$ allora:

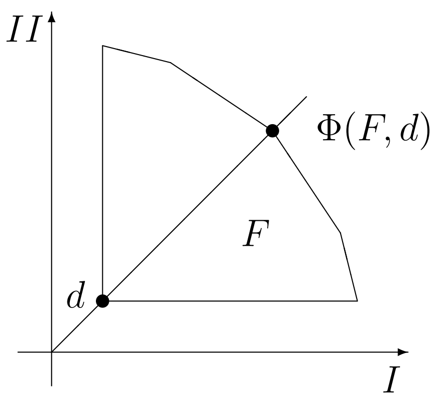
$$\Phi(\tilde{F}, \tilde{d}) = (\lambda_1 \Phi_1(F, d) + \mu_1, \lambda_2 \Phi_2(F, d) + \mu_2)$$



4. Simmetria

Se $(a, b) \in F \iff (b, a) \in F$ e $d_1 = d_2$ allora:

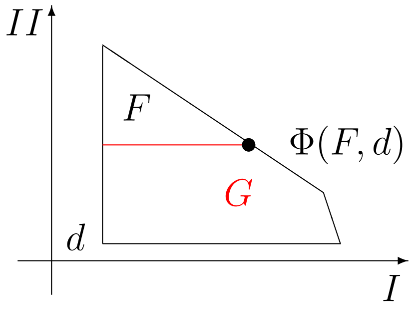
$$\Phi_1(F, d) = \Phi_2(F, d)$$



5. Indipendenza dalle alternative irrilevanti

Assioma controverso

$$d, \Phi(F, d) \in G \subset F \Rightarrow \Phi(G, d) = \Phi(F, d)$$



Teorema 3.1 *Esiste un'unica funzione* $\Phi : C \to \mathbb{R}^2$ *che soddisfa gli assiomi di Nash:*

$$\Phi(F, d) = argmax \, \{(x_1 - d_1)(x_2 - d_2) | x \in F\} = N_S$$

- L'unicità della soluzione sussiste se F ha almeno un punto interno

- Nella trattazione precedente sono state fatte alcune ipotesi non necessariamente verificate:

  1. non è detto che il punto d influenzi nel modo esposto la soluzione
  2. i decisori possono non uniformarsi al modello di von Neumann - Morgenstern

  Dati due problemi identici si può pervenire a risultati diversi (un decisore potrebbe essere più rigido in un caso che nell'altro)

Il problema di contrattazione è alla base di numerosi concetti di soluzione tra i quali l'insieme di contrattazione (Bargaining set) di Aumann e Maschler (1964), il Kernel introdotto da Davis e Maschler (1965) e il nucleolo dovuto a Schmeidler (1969)

3.3.2 Altre soluzioni

L'assioma 5 è stato oggetto di revisione da parte di Kalai-Smorodinsky (1975):

<u>5'. Monotonia individuale</u>

Sia $d \in G \subset F$

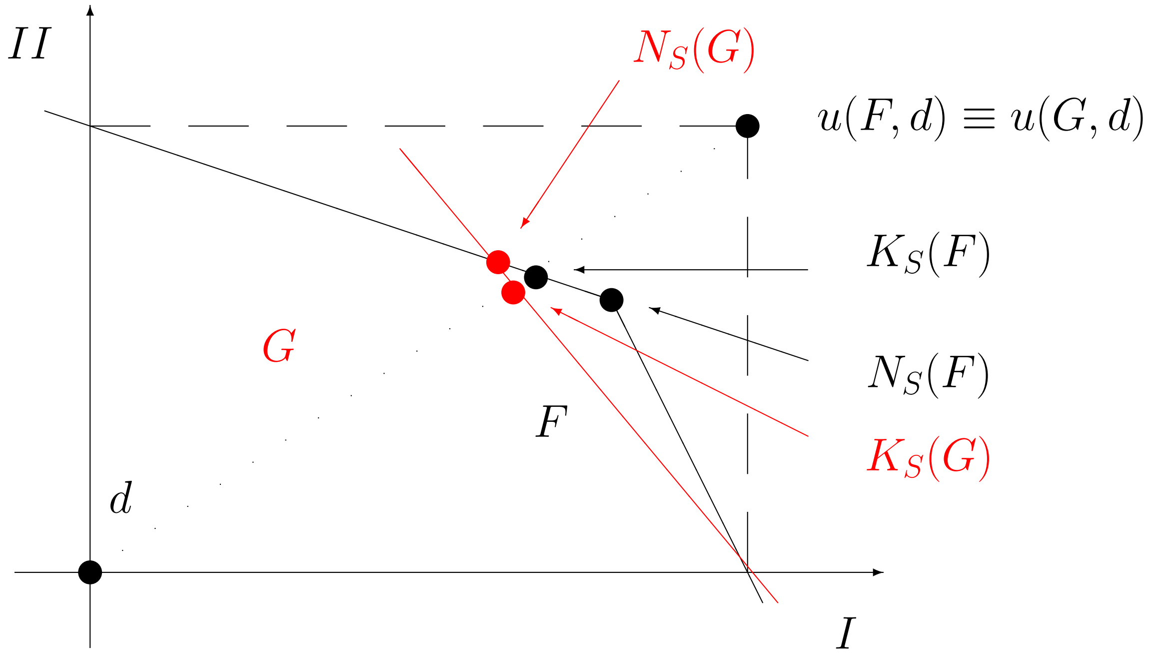
Se $u_1(G,d) = u_1(F,d)$ allora $\Phi_2(G,d) \leq \Phi_2(F,d)$ e se $u_2(G,d) = u_2(F,d)$ allora $\Phi_1(G,d) \leq \Phi_1(F,d)$, dove $u(F,d)$ è il punto *utopia* del problema (F,d), cioè $u_i(F,d) = max\ \{x_i \mid x \in F\}, i = 1, 2$

Kalai e Smorodinsky hanno proposto la seguente soluzione:

$$K_S = argmax\ \left\{ x \in F \,\middle|\, \frac{x_1 - d_1}{u_1(F,d) - d_1} = \frac{x_2 - d_2}{u_2(F,d) - d_2} \right\}$$

L'assioma 5' è violato dalla soluzione di Nash

Esempio 3.1 (Soluzioni di Nash e di Kalai-Smorodinsky) *Si consideri la seguente situazione:*



Passando da F a G, il punto utopia è invariato ma $N_{S2}(G) > N_{S2}(F)$, mentre $K_{S2}(G) < K_{S2}(F)$ $\diamondsuit$

Data l'importanza del problema di contrattazione sono state proposte altre soluzioni, tra cui:

Soluzione Egualitaria - Kalai (1977)

$E_S = argmax\ \{|x-d|,\ x \in F|\ x_1 - d_1 = x_2 - d_2\}$

Monotonia stretta

Siano (F,d) e (G,d) due problemi di contrattazione, con $d \in G \subseteq F$ allora $\Phi(G,d) \leq \Phi(F,d)$

Teorema 3.2 *La soluzione egualitaria è l'unica funzione $\Phi : C \to \mathbb{R}^2$ che soddisfa gli assiomi di efficienza stretta, simmetria e monotonia stretta*

Altre soluzioni sono:

Soluzione λ-Egualitaria

$E_S^\lambda = argmax\ \{|x-d|,\ x \in F|\ \lambda_1(x_1 - d_1) = \lambda_2(x_2 - d_2),\ \lambda_1, \lambda_2 > 0\}$

Soluzione delle Aree uguali

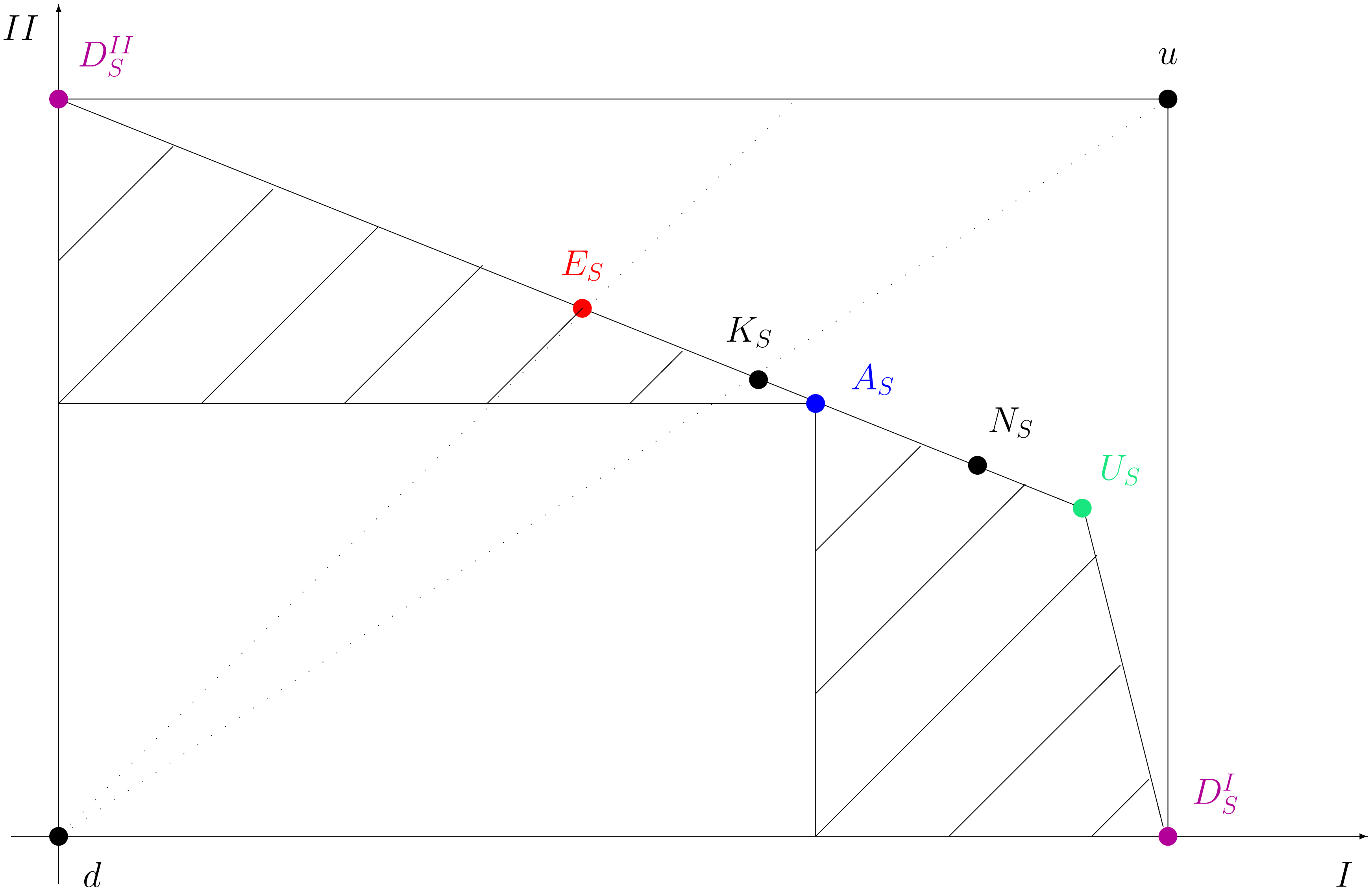
A_S s.t. $\mathcal{A}\left(\left\{d + \mathbb{R}^2_{\geq}\right\} \cap \{x \in F \mid x_1 \geq (A_S)_1\}\right) = \mathcal{A}\left(\left\{d + \mathbb{R}^2_{\geq}\right\} \cap \{x \in F \mid x_2 \geq (A_S)_2\}\right)$

Soluzione Dittatoriale

$D_S^i = argmax\ \{x_i | x \in F, x_j = d_j, j \neq i\}$

Soluzione Utilitaria

$U_S = argmax\ \{x_1 + x_2 | x \in F\}$



II
D_S^{II}
u
E_S
K_S
A_S
N_S
U_S
D_S^I
d
I

3.4 Giochi cooperativi a pagamenti laterali

In questi giochi introdotti da Von Neumann e Morgenstern (1944) i giocatori possono stipulare accordi vincolanti e possono ripartirsi la vincita con un accordo al di fuori delle regole del gioco, la cui validità può estendersi anche oltre la fine del gioco

Per avere un gioco TU devono essere soddisfatte tre ulteriori ipotesi:

- deve essere possibile trasferire l'utilità (da un punto di vista normativo)
- deve esistere un mezzo comune di scambio, ad esempio il denaro, con cui trasferire l'utilità (da un punto di vista materiale)
- le funzioni di utilità dei giocatori devono essere equivalenti

Come trasferire la vincita se i giocatori hanno differenti funzioni di utilità?

Definizione 3.3 *Un gioco TU è una coppia* $G = (N, v)$ *dove* N *è l'insieme dei giocatori e* v *è la funzione caratteristica, con* $v(\emptyset) = 0$

Se $v(S) \leq 0, S \subseteq N$ si ha un *gioco di costi* o cost game (N, c) in cui si pone $c = -v$

Esempio 3.2 (Gioco dei guanti) *Due insiemi di giocatori, L ed R, possiedono dei guanti; i giocatori di L possiedono solo guanti sinistri mentre i giocatori di R possiedono solo guanti destri. Il valore di una coalizione è dato dal numero di paia di guanti che riescono a formare. In generale ogni giocatore possiede un solo guanto. Se i giocatori di L sono 1 e 2 e i giocatori di R sono 3 e 4 si ha:*

$$
\begin{aligned}
&N = \{1, 2, 3, 4\} \\
&v(i) = 0 && i \in N \\
&v(12) = v(34) = 0 \\
&v(S) = 1 && se\ |S| = 2\ e\ S \neq \{12\}, S \neq \{34\}\ oppure\ se\ |S| = 3 \\
&v(N) = 2
\end{aligned}
$$

$\diamondsuit$

Esempio 3.3 (Gioco di unanimità)
Sia N l'insieme degli agenti; ad ogni sottoinsieme $T \subseteq N$ è possibile associare il gioco di unanimità *(N, v_T) dove N è l'insieme dei giocatori e v_T è definita da:*

$$v_T(S) = \begin{cases} 1 & \text{se } T \subseteq S \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, S \subseteq N$$

I giochi di unanimità $v_T, T \subseteq N$ formano una base dello spazio dei giochi ad N giocatori $\diamondsuit$

Esempio 3.4 (Gioco di identità)
Sia N l'insieme degli agenti; ad ogni sottoinsieme $T \subseteq N$ è possibile associare il gioco di identità *(N, v_T) dove N è l'insieme dei giocatori e v_T è definita da:*

$$v_T(S) = \begin{cases} 1 & \text{se } T = S \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, S \subseteq N$$

Anche i giochi di identità $v_T, T \subseteq N$ formano una base dello spazio dei giochi ad N giocatori $\diamondsuit$

Definizione 3.4 *Un gioco* $G = (N, v)$ *si dice monotono se* $v(S) \leq v(T),\ S \subseteq T$

Definizione 3.5 *Dato un gioco* $G = (N, v)$*, se per ogni coppia di coalizioni disgiunte* S *e* T *si ha* $v(S \cup T) = v(S) + v(T)$ *allora* G *è detto additivo; se si ha* $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ *allora* G *è detto superadditivo; se si ha* $v(S \cup T) \leq v(S) + v(T)$ *allora* G *è detto subadditivo*

Definizione 3.6 *Un gioco* $G = (N, v)$ *si dice coesivo se per ogni partizione di* N $\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ *si ha:*

$$\sum_{i=1,\ldots,k} v(S_i) \leq v(N)$$

Per un cost game deve valere $\sum_{i=1,\ldots,k} c(S_i) \geq c(N)$

Definizione 3.7 *Un gioco* $G = (N, v)$ *si dice convesso se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:*

- $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T),\ S, T \subseteq N$
- $v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T),\ S \subset T \subseteq N \setminus \{i\},\ i \in N$

Se le diseguaglianze sono rovesciate, il gioco si dice concavo

Definizione 3.8 *Un gioco* $G = (N, v)$ *si dice semplice o semplice 0-1 se le coalizioni possono assumere solo i valori 0 e 1*
Se una coalizione ha valore 1 è detta vincente, se ha valore 0 è detta perdente
Solitamente la grande coalizione è vincente

- Nella definizione di monotonia non si tiene conto della cardinalità delle coalizioni
- La coesività è più debole della superadditività ed esprime la "convenienza" dei giocatori a formare la grande coalizione, piuttosto che riunirsi in sottocoalizioni. L'importanza deriva dal fatto che in generale i concetti di soluzione più comuni costituiscono una ripartizione del valore della grande coalizione
- L'equivalenza delle definizioni di convessità è oggetto di un teorema
- I giochi semplici trovano applicazione nelle situazioni in cui una coalizione è caratterizzata dal riuscire a conseguire o meno un determinato risultato, come nei giochi di maggioranza, utilizzati in politica

Dimostrare l'equivalenza delle definizioni di convessità
Dimostrare che la coesività è più debole della superadditività

Le soluzioni di un gioco TU possono essere raggruppate in due famiglie:

- *soluzioni insiemistiche* che individuano un insieme di vettori payoff che ripartiscono il valore del gioco tra tutti i giocatori
- *soluzioni puntuali* che individuano una sola ripartizione e che costituiscono l'attuale tendenza in quanto più simili all'idea classica di soluzione di un problema

4 Soluzioni insiemistiche di un gioco TU

4.1 Imputazioni

Per determinare le singole vincite si potrebbe risolvere un sottogioco ristretto ai giocatori di ciascuna coalizione, oppure suddividere in parti uguali la vincita, trascurando il contributo dei singoli giocatori
Altri metodi più complessi tengono conto del ruolo svolto da ciascun giocatore

Definizione 4.1 *Dato un gioco* $G = (N, v)$ *si dice* imputazione *o* ripartizione del valore del gioco *un vettore* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *tale che:*

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N) \qquad \textit{efficienza}$$
$$x_i \geq v(i), i \in N \qquad \textit{razionalità individuale}$$

Nel caso di un cost game la razionalità individuale richiede $x_i \leq c(i), i \in N$

L'insieme di tutte le imputazioni si indica con $E(v)$

Definizione 4.2 *Se per un gioco $G = (N, v)$ si ha:*

$$\sum_{i \in N} v(i) = v(N)$$

allora $E(v)$ ha come unico elemento $x = (v(1), v(2), \dots, v(n))$; in questo caso il gioco è detto inessenziale*; se $\sum_{i \in N} v(i) < v(N)$ il gioco è detto* essenziale

La razionalità individuale costituisce una condizione per ogni concetto di soluzione
Se il gioco è essenziale esistono più imputazioni possibili e si ripropone il problema di scegliere la "soluzione": se due imputazioni x e y sono distinte esiste almeno un giocatore $k \in N$ per cui $x_k > y_k$ e almeno un giocatore $h \in N$ per cui $x_h < y_h$

4.2 Nucleo

E' probabilmente il concetto di soluzione insiemistico più interessante per numerose classi di giochi; è stato introdotto da Gillies (1953 e 1959)

$$x(S) \geq v(S) \;\; S \subset N \qquad \textit{razionalità di coalizione}$$

Definizione 4.3 *Si dice nucleo di un gioco, o core, l'insieme:*

$$C(v) = \{x \in E(v) | x(S) \geq v(S), \; S \subset N\}$$

Nel caso di un cost game c *la razionalità di coalizione richiede* $x(S) \leq c(S), \; S \subset N$

- Il nucleo può essere vuoto come nel gioco di maggioranza semplice e in generale nei giochi essenziali a somma costante
- Il nucleo ha un aspetto normativo (quali soluzioni non bisogna scegliere). Se il nucleo è vuoto non si può concludere che la grande coalizione non si forma, ma solo che è instabile

Esempio 4.1 (Nucleo del gioco dei guanti) *Riferendosi all'Esempio 3.2, il nucleo è:*

$$C(v) = \{(\alpha, \alpha, 1-\alpha, 1-\alpha) s.t. 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

In generale se $L = \{1, ..., n_l\}$ e $R = \{1, ..., n_r\}$ si ha:
se $n_l = n_r$:

$$C(v) = \{(\alpha, ..., \alpha, 1-\alpha, ..., 1-\alpha) s.t. 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

se $n_l < n_r$:

$$C(v) = \{(\underbrace{1, ..., 1}_{1,...,n_l}, \underbrace{0, ..., 0}_{1,...,n_r})\}$$

se $n_l > n_r$:

$$C(v) = \{(\underbrace{0, ..., 0}_{1,...,n_l}, \underbrace{1, ..., 1}_{1,...,n_r})\}$$

Il nucleo evidenzia il comportamento del mercato quando uno tra due beni complementari è carente $\diamondsuit$

Determinare il nucleo del gioco di unanimità

Determinare il nucleo del gioco di identità

4.2.1 Bilanciamento

Per stabilire se un gioco ha nucleo vuoto o meno, la coesività o la superadditività non danno informazioni precise; ad esempio il gioco di maggioranza semplice ha nucleo vuoto ma è superadditivo e quindi anche coesivo
Un gioco può non essere superadditivo, ma avere nucleo non vuoto

Esempio 4.2 (Gioco non superadditivo a nucleo non vuoto) *Si consideri il gioco TU:*

$$\begin{aligned} &N = \{1,2,3\} \\ &v(S) = 1 \qquad se\ S \neq \varnothing, S \neq N \\ &v(N) = 3 \end{aligned}$$

Il gioco non è superadditivo poichè $v(1) + v(2) = 2 > 1 = v(12)$ *ma* $x = (1,1,1) \in C(v)$ $\diamondsuit$

Se un gioco non è coesivo ha nucleo vuoto, in quanto per ogni allocazione x esisterebbe una partizione $\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ tale che:

$$x(N) = v(N) < \sum_{i=1,\ldots,k} v(S_i) \leq \sum_{i=1,\ldots,k} x(S_i) = x(N)$$

Le imputazioni del nucleo possono essere caratterizzate come le soluzioni del problema lineare:

$$\begin{aligned} min \quad & z = \sum_{i \in N} x_i \\ s.t. \quad & \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \quad S \subseteq N \end{aligned}$$

per le quali $z^* = v(N)$

Il duale del problema è:

$$\begin{aligned} max \quad & w = \sum_{S \subseteq N} y_s v(S) & \\ s.t. \quad & \sum_{S \ni i} y_S = 1 & i \in N \\ & y_S \geq 0 & S \subseteq N \end{aligned}$$

per le quali $w^* = v(N)$

Teorema 4.1 *Un gioco v ha nucleo non vuoto se e solo se esiste una soluzione del problema primale con $z^* = v(N)$ o equivalentemente (per il primo teorema della dualità) esiste una soluzione del problema duale con $w^* = v(N)$*

L'utilità di questo teorema è molto limitata in quanto la difficoltà di verificare una delle tre condizioni è equivalente

Definizione 4.4

- *Una collezione* $\mathcal{B} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ *di sottoinsiemi di* N *è detta bilanciata se esistono* m *numeri non negativi* $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *detti coefficienti di bilanciamento, tali che:*

$$\sum_{S_j \ni i} y_j = 1 \qquad i \in N$$

- *Una collezione bilanciata è detta minimale se nessuna sottocollezione è bilanciata*

- *Un gioco è detto bilanciato se per ogni collezione bilanciata minimale* $\mathcal{B} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ *con coefficienti di bilanciamento* $y_1, y_2, \ldots, y_m$*, si ha:*

$$\sum_{j=1,\ldots,m} y_j v(S_j) \leq v(N)$$

Proprietà

- Ogni collezione bilanciata è unione di collezioni bilanciate minimali

- Una collezione bilanciata è minimale se e solo se i coefficienti di bilanciamento sono unici

- Le collezioni bilanciate non dipendono dalla funzione caratteristica, ma solo da N

Esempio 4.3 (Collezioni bilanciate I)

1. *Ogni partizione di N è una collezione bilanciata, con coefficienti unitari*
2. *Sia $N = \{1, 2, 3\}$; $\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ è una collezione bilanciata con coefficienti $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. In generale per ogni N la collezione di $\binom{n}{s}$ sottoinsiemi distinti di s elementi è bilanciata con coefficienti $\binom{n-1}{s-1}^{-1}$* $\diamondsuit$

Teorema 4.2 (Bondareva, 1963 - Shapley, 1967) *Un gioco $G = (N, v)$ ha nucleo non vuoto se e solo se è bilanciato*

- Il teorema di Bondareva-Shapley considera un sistema lineare generato da un sottoinsieme dei vincoli del problema duale associato al nucleo
- Per un gioco superadditivo il teorema di Bondareva-Shapley è vero per le partizioni di N, quindi è sufficiente verificarlo per le altre collezioni bilanciate minimali
- Il teorema è particolarmente utile per dimostrare che un gioco ha nucleo vuoto in quanto è sufficiente trovare una collezione bilanciata che non verifica la condizione
- Un gioco a nucleo non vuoto viene anche detto bilanciato

Esempio 4.4 (Collezioni bilanciate II)

1. *Un gioco a tre giocatori superadditivo è bilanciato se e solo se* $v(12) + v(13) + v(23) \leq 2\ v(123)$ *poichè* $\mathcal{B} = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$ *è l'unica collezione bilanciata minimale con coefficienti* $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

2. *Sia dato il gioco:*

$$\begin{aligned}
&N = \{1,2,3,4\} \\
&v(1) = v(2) = v(3) = v(4) = v(14) = v(24) = 0; v(23) = v(34) = 2 \\
&v(12) = v(13) = v(123) = 3; v(124) = 4; v(134) = v(234) = 5; v(N) = 6
\end{aligned}$$

Il gioco non è bilanciato in quanto $\mathcal{B} = \{\{1,2\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}$ *è una collezione bilanciata con coefficienti* $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *per la quale si ha:*

$$\frac{1}{2}\ v(12) + \frac{1}{2}\ v(134) + \frac{1}{2}\ v(234) = \frac{13}{2} > 6 = v(N)$$

$\diamondsuit$

4.3 Bilanciamento totale

Definizione 4.5 *Dato un gioco (N, v) e fissata una coalizione $S \subseteq N$, il* sottogioco ristretto *(o* ridotto*)* (S, v^S) *è il gioco con insieme di giocatori S e la funzione caratteristica v^S è la restrizione di v rispetto ad S:*

$$v^S(T) = v(T), T \subseteq S$$

Definizione 4.6 *Un gioco (N, v) è detto* totalmente bilanciato *se ogni sottogioco $(S, v^S), S \subseteq N$ è bilanciato*

5 Soluzioni puntuali di un gioco TU

Prendono frequentemente il nome di *indici di potere* o *valori* perchè permettono di identificare il "potere" di ciascun giocatore all'interno del gioco
Il termine "indice di potere" si usa per i giochi semplici, mentre per un gioco qualsiasi si preferisce il termine "valore"

5.1 Valore di Shapley (1953)

Si basa sul concetto di *contributo marginale*

Definizione 5.1 *Dato un gioco* (N, v), *si chiama valore di Shapley il vettore* $\phi(v)$ *la cui componente* ϕ_i *è il contributo marginale medio del giocatore* $i \in N$ *rispetto alle possibili permutazioni dei giocatori:*

$$\phi_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi} [v(P(\pi, i) \cup \{i\}) - v(P(\pi, i))]$$

dove $n = |N|$, Π *è l'insieme delle permutazioni di* N *e* $P(\pi, i)$ *è l'insieme dei giocatori che precedono* i *nella permutazione* π

Il valore di Shapley per un gioco cooperativo esiste ed è unico

Se il gioco è superadditivo (subadditivo per un cost game) il valore di Shapley è un'imputazione:

$$\sum_{i \in N} \phi_i(v) = v(N)$$
$$\phi_i(v) \geq v(i) \qquad i \in N$$

ma non è necessariamente un elemento del nucleo, anche se il nucleo è non vuoto

Dimostrare che in un gioco superadditivo il valore di Shapley è un'imputazione

Se il gioco è convesso (concavo per un cost game) il valore di Shapley è un elemento del nucleo

Dimostrare l'affermazione precedente

Esempio 5.1 (Gioco di assegnazione) *Si consideri il gioco* (N, v)*, dove* $N = \{1, 2, 3\}$ *e* $v(1) = v(2) = v(3) = v(23) = 0; v(12) = 2; v(13) = v(123) = 5$*; il valore di Shapley è dato da:*

	Contributi marginali		
Permutazioni	*Giocatore* 1	*Giocatore* 2	*Giocatore* 3
1 2 3	$v(1) - v(\emptyset) = 0$	$v(12) - v(1) = 2$	$v(123) - v(12) = 3$
1 3 2	$v(1) - v(\emptyset) = 0$	$v(123) - v(13) = 0$	$v(13) - v(1) = 5$
2 1 3	$v(12) - v(2) = 2$	$v(2) - v(\emptyset) = 0$	$v(123) - v(12) = 3$
2 3 1	$v(123) - v(23) = 5$	$v(2) - v(\emptyset) = 0$	$v(23) - v(2) = 0$
3 1 2	$v(13) - v(3) = 5$	$v(123) - v(13) = 0$	$v(3) - v(\emptyset) = 0$
3 2 1	$v(123) - v(23) = 5$	$v(23) - v(3) = 0$	$v(3) - v(\emptyset) = 0$
ϕ_i	$\frac{17}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{11}{6}$

$\diamondsuit$

Verificare che il nucleo è non vuoto e il valore di Shapley non vi appartiene

5.1.1 Assiomi di Shapley

Sia data una regola ψ che ad un gioco $G(N, v)$ associa un vettore di $\mathbb{R}^N$

1. Simmetria
   Se due giocatori $i, j \in N$ sono simmetrici, cioè $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}), S \subseteq N \setminus \{i, j\}$, allora $\psi_i(v) = \psi_j(v)$
2. Giocatore nullo
   Sia $i \in N$ un giocatore nullo, cioè $v(S \cup \{i\}) = v(S)\ S \subseteq N \setminus \{i\}$, allora $\psi_i(v) = 0$
3. Additività o indipendenza (assioma controverso)
   Dati due giochi u e v, sia $(u + v)$ il gioco somma definito da $(u + v)(S) = u(S) + v(S), S \subseteq N$ allora $\psi_i(u + v) = \psi_i(u) + \psi_i(v), i \in N$

ϕ è l'unico vettore efficiente che soddisfa i precedenti assiomi

- L'assioma di simmetria può essere sostituito dall'assioma di *anonimato*:
  Dato un gioco v e una permutazione dei giocatori π sia u il gioco definito da $u(\pi(S)) = v(S), S \subseteq N$ allora $\psi_{\pi(i)}(u) = \psi_i(v)$
- L'assioma di giocatore nullo può essere sostituito dall'assioma di *giocatore fittizio (dummy player)*:
  Sia $i \in N$ un giocatore fittizio, cioè $v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(i), S \subseteq N \setminus \{i\}$, allora $\psi_i(v) = v(i)$

5.1.2 Calcolo del valore di Shapley

Il valore di Shapley risulta molto complesso da calcolare

Definizione

E' necessario determinare i contributi marginali dei giocatori negli $n!$ possibili ordinamenti

Con 10 giocatori, per ogni giocatore ci sono $10! = 3.628.800$ permutazioni

Semplificazione

Considerare le possibili $2^n - 1$ coalizioni non vuote e per ciascuna considerare ogni giocatore come l'ultimo arrivato e quindi "pesare" il suo contributo marginale con le permutazioni degli altri giocatori della coalizione e dei giocatori non facenti parte della coalizione:

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N, i \in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} [v(S) - v(S \setminus \{i\})]$$

Con 10 giocatori ci sono $2^{10} - 1 = 1.023$ coalizioni

Formule "ad hoc"

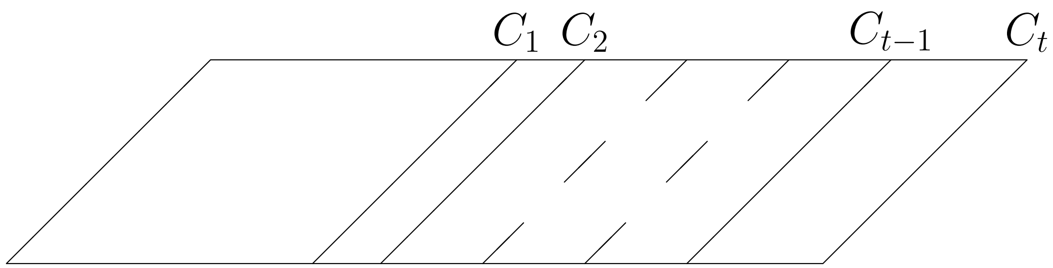
Sfruttare le caratteristiche di alcune classi di giochi

Gioco dell'aeroporto (Airport game - Littlechild e Thompson, 1977)

Ripartire il costo di costruzione e manutenzione della pista tra differenti tipi di aerei

Gli aerei sono raggruppati in t sottoinsiemi disgiunti $N_1, \ldots, N_t$

Gli aerei di N_i richiedono una pista di costo C_i con $C_i < C_{i+1}$



Si definisce il gioco:

$$v(S) = C_{j(S)}$$

dove $j(S) = max \; \{i | S \cap N_i \neq \emptyset\}$

Il valore di Shapley di ogni aereo corrisponde alla seguente ripartizione dei costi (Baker, 1965 e Thompson, 1971):

- Il costo del primo tratto di pista C_1 è diviso tra tutti gli aerei, poichè tutti lo utilizzano;
- Il costo del secondo tratto di pista $C_2 - C_1$ è diviso tra gli aerei dei sottoinsiemi $N_2, \ldots, N_t$ che sono quelli che lo utilizzano;
- Il costo dell'ultimo tratto di pista $C_t - C_{t-1}$ che è diviso tra gli aerei del sottoinsieme N_t che sono gli unici che lo utilizzano.

Questo criterio è facilmente applicabile anche nel caso di molti aerei

Esempio 5.2 (Gioco dell'aeroporto)

$$
\begin{aligned}
&N_1 = \{1,2,3\}; N_2 = \{4,5,6,7\}; N_3 = \{8,9,10\} \\
&C_1 = 20; C_2 = 27; C_3 = 33 \\
&\phi_1 = \tfrac{20}{10} = 2 \\
&\phi_2 = \tfrac{20}{10} + \tfrac{27-20}{7} = 3 \\
&\phi_3 = \tfrac{20}{10} + \tfrac{27-20}{7} + \tfrac{33-27}{3} = 5
\end{aligned}
$$

$\diamondsuit$

La verifica utilizza gli assiomi di Shapley (Littlechild e Owen, 1973)
Si definiscono t giochi $v_1, \ldots, v_t$ con il gioco v_i relativo al tratto di pista i:

$$v_i(S) = \begin{cases} C_i - C_{i-1} & se\ i \leq j(S) \\ 0 & se\ i > j(S) \end{cases}$$

dove $C_0 = 0$
A questo punto si osserva che:

1. gli aerei di $N_1, \ldots, N_{i-1}$ sono giocatori nulli per il gioco v_i
2. gli aerei di $N_i, \ldots, N_t$ sono giocatori simmetrici per il gioco v_i
3. v è dato dalla somma dei giochi v_i

5.1.3 Un'applicazione del valore di Shapley

Esempio 5.3 (Consiglio dell'UE 1958-1973) *Il valore di Shapley permette di evidenziare un difetto nei pesi assegnati nel Consiglio dell'UE del 1958*
$quota_{1958} = 11$ $(17 \times 0.7 = 11.9)$; $quota_{1973} = 40$ $(58 \times 0.7 = 40.6)$

	1958			1973		
Paesi	*Peso*	*%*	*Shapley*	*Peso*	*%*	*Shapley*
Francia	4	23.53	0.233	10	17.24	0.179
Germania	4	23.53	0.233	10	17.24	0.179
Italia	4	23.53	0.233	10	17.24	0.179
Belgio	2	11.76	0.150	5	8.62	0.081
Paesi Bassi	2	11.76	0.150	5	8.62	0.081
Lussemburgo	1	5.88	0.000	2	3.45	0.010
Regno Unito	-	-	-	10	17.24	0.179
Danimarca	-	-	-	3	5.17	0.057
Irlanda	-	-	-	3	5.17	0.057
Totale	17	100.00	1.000	58	100.00	1.000

$\diamondsuit$

Dimostrare che il Valore Shapley è monotono rispetto ai pesi

5.2 Nucleolo (Schmeidler, 1969)

Si basa sull'idea di minimizzare il massimo "malcontento"
Principio di Rawls: massimizzare l'utilità dell'agente che ottiene il peggior risultato

Definizione 5.2 *Dato un gioco v, sia S una coalizione e x una possibile ripartizione del valore del gioco; si dice rimpianto o eccesso di S rispetto ad x la quantità:*

$$e(S, x) = v(S) - x(S)$$

Nel caso di un cost game il rimpianto è $x(S) - c(S)$

- Nella definizione precedente x è una ripartizione del valore del gioco in quanto deve soddisfare solo l'ipotesi di efficienza; in questo caso talvolta si usano i termini preimputazione e prenucleolo per indicare che non si tiene conto della razionalità individuale

E' possibile definire il vettore $\vartheta(x) \in \mathbb{R}^{2^n}$:

$$\begin{aligned} &\vartheta_1(x) = max\ \{e(S, x) | S \subset N\} = e(S_1, x) \\ &\vartheta_i(x) = max\ \{e(S, x) | S \subset N, S \neq S_j, j = 1, \ldots, i-1\} = e(S_i, x) \qquad i = 2, \ldots, 2^n \end{aligned}$$

Le componenti di $\vartheta(x)$ sono i rimpianti generati da x al variare di S, in ordine debolmente decrescente

Esempio 5.4 (Vettore degli eccessi) *Sia dato il gioco:*

$$N = \{1, 2, 3\}$$
$$v(1) = v(2) = v(3) = 0; v(12) = 2; v(13) = v(23) = 3; v(N) = 5$$

Data la ripartizione $x = (3, 1, 1)$ *si ha:*

$$e(1, x) = -3; e(2, x) = -1; e(3, x) = -1; e(12, x) = -2; e(13, x) = -1; e(23, x) = 1; e(N, x) = 0$$

e quindi:

$$\vartheta(x) = (1, 0, -1, -1, -1, -2, -3)$$

◇

Definizione 5.3 *Dati due vettori* $x, y \in \mathbb{R}^n$*, si dice che* x *è lessicograficamente minore di* y *e si indica con* $x <_L y$*, se esiste* $i \geq 1$ *per cui:*

$$\begin{aligned} x_j &= y_j \qquad j < i \\ x_i &< y_i \end{aligned}$$

Definizione 5.4 *Dato un gioco* v *si dice nucleolo del gioco il vettore* $\nu(X)$ *che genera il minimo, secondo l'ordine lessicografico, dei vettori* $\vartheta(x)$ *al variare di* x *nell'insieme* X *delle possibili ripartizioni*

- Il nucleolo è un elemento del nucleo se è non vuoto, per cui costituisce un concetto di soluzione per i giochi a nucleo vuoto, ma permette anche di "scegliere" un elemento del nucleo

Dimostrare che in nucleolo appartiene al nucleo

Esempio 5.5 (Ordine lessicografico) *Sia dato il seguente gioco:*

$$N = \{1, 2\}$$
$$v(1) = 1; v(2) = 3; v(12) = 8$$

Dati $x = (6, 2)$ *e* $y = (3, 5)$ *si ha:*

$$e(1, x) = -5; e(2, x) = 1; e(12, x) = 0$$
$$e(1, y) = -2; e(2, y) = -2; e(12, y) = 0$$

e quindi $\vartheta(x) = (1, 0, -5)$ *e* $\vartheta(y) = (0, -2, -2)$ *per cui* $\vartheta(y) <_L \vartheta(x)$
Si può verificare che $y = \nu(X)$ $\diamondsuit$

Proprietà

Se X è non vuoto, compatto e convesso allora $\nu(X)$ esiste ed è unico

5.2.1 Calcolo del nucleolo

Algoritmo di Kopelowitz (1967)

Il massimo rimpianto delle coalizioni è rappresentato da α:

$$v(S) - x(S) \leq \alpha, \; S \subset N$$

E' sufficiente cercare il minimo di α

La grande coalizione viene esclusa poichè il suo rimpianto è sempre nullo

α non è vincolata in segno

$$\begin{array}{ll} min & \alpha \\ s.t. & \sum\limits_{i \in N} x_i = v(N) \\ & \sum\limits_{i \in S} x_i + \alpha \geq v(S), \; S \subset N \end{array}$$

Se la soluzione non è unica si itera l'algoritmo, conservando il massimo rimpianto ottenuto

Detto S_0 l'insieme delle coalizioni leganti, la nuova ripartizione deve minimizzare il massimo rimpianto per le altre coalizioni, senza incrementare il rimpianto per le coalizioni di S_0, per cui si riscrivono i vincoli:

$$\sum_{i \in S} x_i = v(S) - \alpha_0, \; S \in S_0$$

Si ottengono α_1 e S_1; iterando dopo al più n iterazioni la soluzione è unica e costituisce il nucleolo del gioco

Esempio 5.6 (Calcolo del nucleolo) *Sia dato il seguente gioco:*

$$N = \{1, 2, 3\}$$
$$v(1) = v(2) = v(3) = 0; v(12) = 2; v(13) = 3; v(23) = 5; v(N) = 6$$

Il primo problema è:

$$\begin{array}{ll} min & \alpha \\ s.t. & x_1 + x_2 + x_3 = v(N) = 6 \\ & x_1 + x_2 + \alpha \geq v(12) = 2 \\ & x_1 + x_3 + \alpha \geq v(13) = 3 \\ & x_2 + x_3 + \alpha \geq v(23) = 5 \\ & x_1 + \alpha \geq v(1) = 0 \\ & x_2 + \alpha \geq v(2) = 0 \\ & x_3 + \alpha \geq v(3) = 0 \end{array}$$

In forma tabellare:

	x_1	x_2	x_3	α^+	α^-	
v_1	1	1	1	0	0	-6
u_2	1	1	0	1	-1	-2
u_3	1	0	1	1	-1	-3
u_4	0	1	1	1	-1	-5
u_5	1	0	0	1	-1	0
u_6	0	1	0	1	-1	0
u_7	0	0	1	1	-1	0
$-z$	0	0	0	-1	1	0

	v_1	u_4	u_3	α^+	u_5	
x_1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
u_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_3	0	0	1	0	-1	3
x_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
α^-	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
u_6	0	1	-1	0	1	2
u_7	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
$-z$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

La soluzione ottimale è $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 3\right)$ *con* $\alpha_0 = -\frac{1}{2}$ *e* $S_0 = \{\{1\}, \{2,3\}\}$

La soluzione non è unica; si itera riscrivendo i vincoli associati alle coalizioni in S_0

Il secondo problema è:

$$\begin{aligned}
min \quad & \alpha \\
s.t. \quad & x_1 + x_2 + x_3 = v(N) = 6 \\
& x_1 + x_2 + \alpha \geq v(12) = 2 \\
& x_1 + x_3 + \alpha \geq v(13) = 3 \\
& x_2 + x_3 = v(23) - \alpha_0 = \tfrac{11}{2} \\
& x_1 = v(1) - \alpha_0 = \tfrac{1}{2} \\
& x_2 + \alpha \geq v(2) = 0 \\
& x_3 + \alpha \geq v(3) = 0
\end{aligned}$$

In forma tabellare:

	x_1	x_2	x_3	α^+	α^-	
v_1	1	1	1	0	0	-6
u_2	1	1	0	1	-1	-2
u_3	1	0	1	1	-1	-3
v_4	0	1	1	0	0	$-\frac{11}{2}$
v_5	1	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$
u_6	0	1	0	1	-1	0
u_7	0	0	1	1	-1	0
$-z$	0	0	0	-1	1	0

	v_1	v_4	u_3	α^+	u_2	
x_1	1	-1	0	0	0	$\frac{1}{2}$
α^-	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
x_3	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{13}{4}$
x_2	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{4}$
v_5	1	-1	0	0	0	0
u_6	-1	1	0	0	1	$\frac{3}{2}$
u_7	-1	1	1	0	0	$\frac{5}{2}$
$-z$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$

La soluzione ottimale è $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}, \frac{13}{4}\right)$ *con* $\alpha_1 = -\frac{3}{4}$ *e* $S_1 = \{\{1,2\},\{1,3\}\}$

La soluzione è unica e la ripartizione trovata costituisce il nucleolo $\diamondsuit$

6 Giochi di bancarotta

6.1 Problemi di bancarotta

Allocazione di una risorsa insufficiente (O'Neill, 1982; Aumann e Maschler, 1985; Curiel, Maschler e Tijs,1987)

$$BP = (N, c, E) = (E; c_1, ..., c_n)$$

dove $N = \{1, ..., n\}$	insieme dei creditori
$c = \{c_1, ..., c_n\}$	vettore delle richieste
E	capitale, con $E \leq \sum_{i \in N} c_i = C$

Una *soluzione* è un vettore reale $x = (x_1, ..., x_n)$, dove x_i rappresenta la quota monetaria assegnata al creditore $i \in N$, che soddisfa le seguenti condizioni:

$$0 \leq x_i \leq c_i, \qquad i \in N \qquad \text{(razionalità)}$$

and

$$\sum_{i \in N} x_i = E \qquad \text{(efficienza)}$$

Una *regola* è una funzione ψ che determina una soluzione per ogni problema di bancarotta

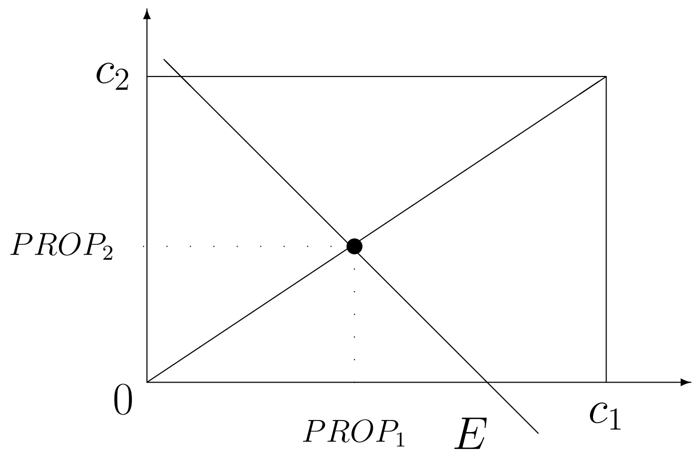
Soluzioni

Le quattro soluzioni classiche sono (Herrero and Villar, 2001)

- Proporzionale

  Le quote assegnate sono proporzionali alle richieste:

$$PROP(N, c, E)_i = \frac{E}{C}\, c_i \qquad i \in N$$



- Constrained Equal Awards

  Le quote assegnate sono uguali per tutti, col vincolo di non superare le richieste:

$$CEA(N, c, E)_i = \min\{\alpha, c_i\} \qquad i \in N$$

  dove α è tale che $\sum_{i \in N} CEA(N, c, E)_i = E$

- Constrained Equal Losses

  Le quote assegnate sono uguali alle richieste, diminuite di una quantità uguale per tutti, col vincolo di non assegnare quote negative:

$$CEL(N, c, E)_i = \max\{c_i - \beta, 0\} \qquad i \in N$$

  dove β è tale che $\sum_{i \in N} CEL(N, c, E)_i = E$

- Talmud

$$TAL(N, c, E) = \begin{cases} CEA(N, c/2, E) & \text{se } E \leq C/2 \\ c/2 + CEL(N, c/2, E - C/2) & \text{se } E > C/2 \end{cases}$$

Rappresentare graficamente le ultime tre regole, nel caso di due agenti

Esempio 6.1 (Soluzioni) *Si consideri il problema di bancarotta* $(72; 6, 9, 24, 33, 36)$

$$C = 108; \frac{E}{C} = \frac{2}{3}$$
$$PROP = (4, 6, 16, 22, 24)$$
$$CEA = (6, 9, 19, 19, 19) \qquad [\alpha = 19]$$
$$CEL = (0, 1.5, 16.5, 25.5, 28.5) \qquad [\beta = 7.5]$$
$$TAL = (3, 4.5, 14.5, 23.5, 26.5)$$

$\diamondsuit$

$PROP$ è la più intuitiva

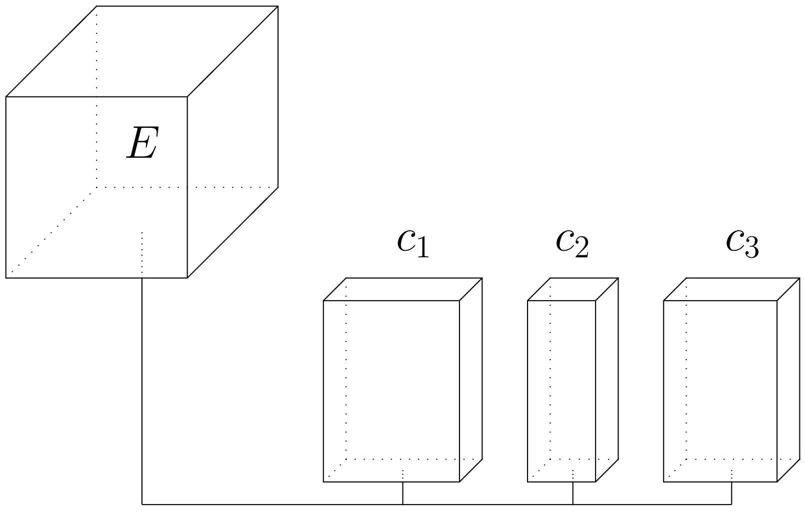
CEA è quella che più protegge i piccoli creditori

CEL è quella più favorevole ai grossi creditori

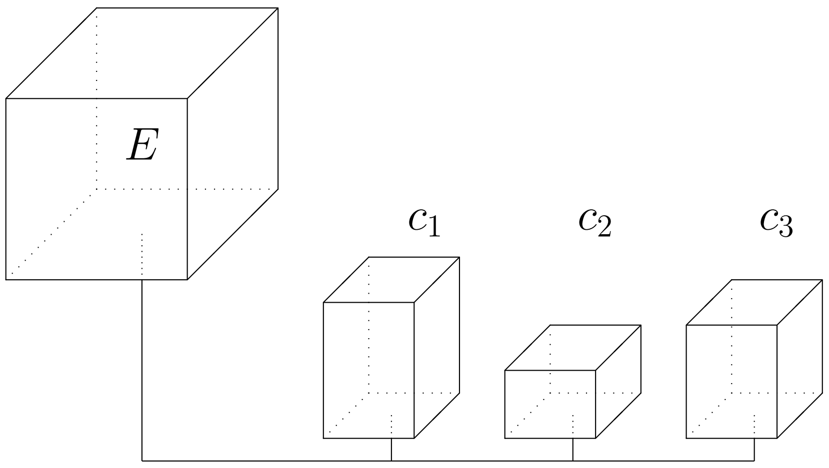
TAL è equivalente al nucleolo di un opportuno gioco di bancarotta

Interpretazione dei vasi comunicanti

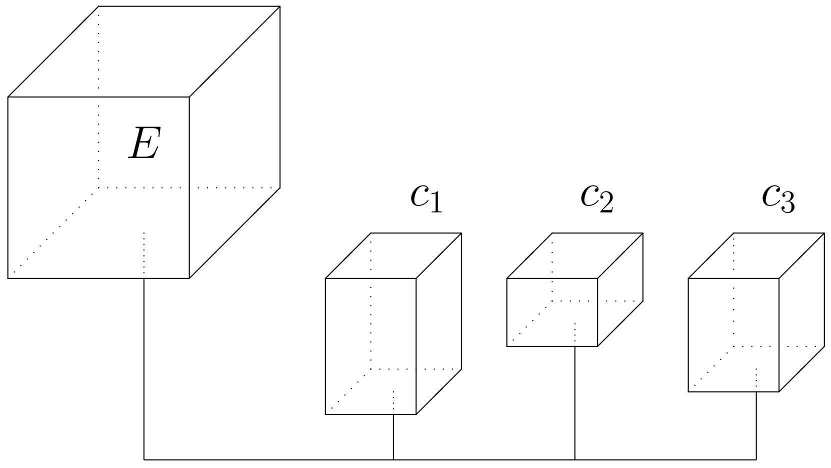
- $PROP$



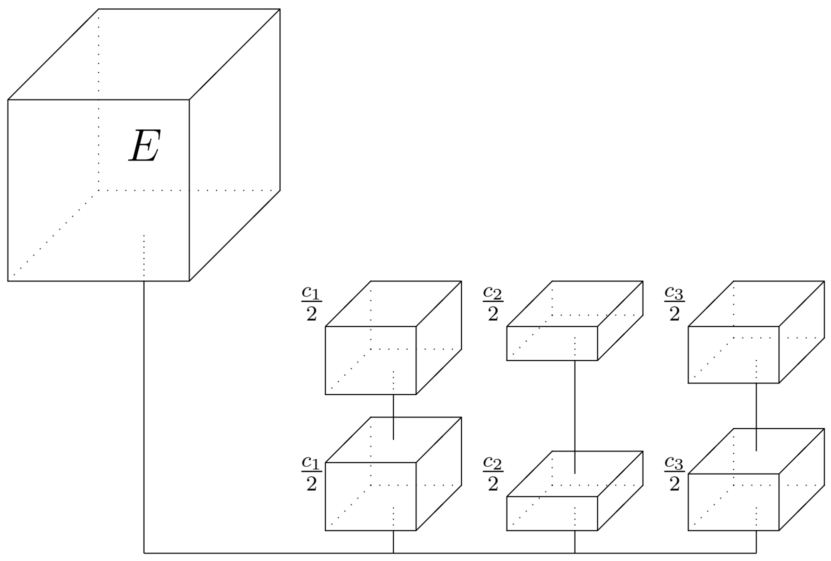
- CEA



- CEL


E
c_1
c_2
c_3

- TAL


E
$\frac{c_1}{2}$
$\frac{c_2}{2}$
$\frac{c_3}{2}$
$\frac{c_1}{2}$
$\frac{c_2}{2}$
$\frac{c_3}{2}$

Dualità

Data una regola ψ, la regola duale ψ^* produce la stessa soluzione se applicata per determinare le perdite rispetto alle richieste:

$$\psi^*(N, c, E) = c - \psi(N, c, C - E)$$

CEA e CEL sono duali, mentre $PROP$ e TAL sono *autoduali*:

- $CEA(N, c, E) = c - CEL(N, c, C - E)$
- $CEL(N, c, E) = c - CEA(N, c, C - E)$
- $PROP(N, c, E) = c - PROP(N, c, C - E)$
- $TAL(N, c, E) = c - TAL(N, c, C - E)$

Verificare formalmente la dualità e l'auto-dualità

Commenti

E' un modello molto semplice di molte situazioni reali

Alcuni ulteriori elementi esistenti in letteratura sono:

- diritti minimi dei creditori (Curiel, Maschler e Tijs, 1987; Pulido, Sanchez-Soriano e Llorca, 2002; Hougaard, Moreno-Ternero e Østerdal, 2013a e 2013b)
- differenti priorità dei creditori (Young, 1994; Bebchuck e Fried, 1996; Schwarcz, 1997; Kaminski, 2000)
- crediti e capitale negativi (Herrero, Maschler e Villar, 1999; Branzei, Ferrari, Fragnelli e Tijs, 2008 e 2011)
- situazioni di utilità non trasferibile (Orshan, Valenciano e Zarzuelo, 2003; Carpente, Casas-Mendez, Gozalvez, Llorca, Pulido e Sanchez-Soriano, 2013; Dietzenbacher, 2018)
- crediti e/o capitale interi (Herrero e Martinez, 2004, 2008a, 2008b e 2011; Fragnelli, Gagliardo e Gastaldi, 2014; Fragnelli e Gastaldi, 2016 e 2017)
- ripartizioni multiple (Calleja, Borm e Hendrickx, 2005; Moreno-Ternero, 2009)

Tre importanti survey sono dovuti a Thomson (2003, 2013 e 2015)

6.2 Giochi di bancarotta

Si possono definire due giochi TU, uno pessimistico, (N, v_P), e uno ottimistico, (N, v_O):

$$v_P(S) = max\left(0, E - \sum_{i \in N \setminus S} c_i\right) \qquad S \subseteq N$$

$$v_O(S) = min\left(E, \sum_{i \in S} c_i\right) \qquad S \subseteq N$$

Esempio 6.2 (Inconsistenza del gioco ottimistico) *Si consideri il problema di bancarotta* $(5; 3, 4)$*. I due giochi sono definiti rispettivamente da:*

$$v_O(1) = 3; v_O(2) = 4; v_O(12) = 5$$
$$v_P(1) = 1; v_P(2) = 2; v_P(12) = 5$$

per cui il gioco ottimistico dice che i due giocatori separatamente possono ottenere rispettivamente 3 *e* 4*, mentre il capitale è solo* 5 $\diamondsuit$

Il nucleo del gioco pessimistico coincide con l'insieme delle soluzioni ammissibili del problema di bancarotta:

$$x \in core(v_P) \iff \begin{cases} a) & \displaystyle\sum_{i \in N} x_i = E \\ b) & 0 \leq x_i \leq c_i, \qquad i \in N \end{cases}$$

Dimostrarlo

Regole di Teoria dei Giochi

Una regola ψ è detta di Teoria dei Giochi se è possibile definire un concetto di soluzione F per giochi cooperativi per cui:

$$\psi(N, c, E) = F(N, v_P)$$

per ogni problema di bancarotta (N, c, E), dove (N, v_P) è il gioco pessimistico associato a (N, c, E)

Curiel, Maschler e Tijs (1987) hanno dimostrato che una regola ψ è di Teoria dei Giochi se e solo se soddisfa la proprietà di *troncamento*:

$$\psi(N, c, E) = \psi(N, \bar{c}, E)$$

dove $\bar{c}_i = min\{c_i, E\}, i \in N$

Quali regole sono di Teoria dei Giochi?

7 Operations Research Games

Gli ORG riconsiderano i problemi classici di Ricerca Operativa, introducendo più decisori (vedi Borm, Hamers e Hendrickx, 2001)
Questi giochi sfruttano la struttura dei problemi da cui derivano, permettendo di calcolare la funzione caratteristica semplicemente e risolvendo alcune delle difficoltà relative al significato
Si possono identificare due gruppi:
Linear Programming Games

- Sequencing games
- Linear production games
- Assignment games
- ...

Network Games

- Flow games
- Shortest path games
- Minimum cost spanning tree games
- Fixed tree games
- ...

7.1 Linear Programming Games

Questi giochi derivano da situazioni rappresentabili tramite un problema di programmazione lineare

7.1.1 Sequencing Games

Gli agenti sono in attesa di un servizio di cui è noto il tempo (deterministico) e ogni agente conosce il suo costo per unità di tempo

Due agenti consecutivi possono scambiarsi per ridurre il loro costo complessivo

Un problema di sequenziamento è una quadrupla

$$\mathcal{S} = (N, \sigma_0, \alpha, s)$$

dove	$N = \{1, ..., n\}$	insieme degli agenti
	σ_0	iniziale (permutazione)
	$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$	costi per unità di tempo
	$s = (s_1, ..., s_n)$	tempi di servizio

Costo di un ordinamento σ:

$$C_\sigma = \sum_{i \in N} \alpha_i \left(\sum_{j \in P(\sigma,i)} s_j + s_i \right)$$

dove $P(\sigma, i)$ è l'insieme dei predecessori dell'agente $i \in N$ in σ

Smith (1956) ha dimostrato che l'ordinamento ottimale σ^* corrisponde all'ordine debolmente decrescente degli indici di urgenza $u_i = \dfrac{\alpha_i}{s_i}, i \in N$

Esempio 7.1 (Problema di sequenziamento) *Sia dato il problema di sequenziamento definito da* $N = \{1, 2, 3\}, \sigma_0 = (1, 2, 3), \alpha = (5, 9, 8), s = (5, 3, 4)$
$C_{\sigma_0} = 25 + 72 + 96 = 193$
$u = (1, 3, 2) \Rightarrow \sigma^* = (2, 3, 1)$ e $C_{\sigma^*} = 27 + 56 + 60 = 143$ $\diamondsuit$

Il corrispondente gioco TU (N, v) è definito da (vedi Curiel, Maschler e Tijs, 1989):

- l'insieme dei giocatori è N (ogni giocatore richiede un solo servizio)
- una coalizione $T \subseteq N$ è detta *connessa secondo* σ_0 se $i, j \in T, k \in N$ con $\sigma_0(i) < \sigma_0(k) < \sigma_0(j)$ implica $k \in T$
- scambiando due giocatori $i, j \in T$ la variazione di costo è $\alpha_j s_i - \alpha_i s_j$ che risulta positiva se $u_i < u_j$; se è negativa i giocatori non si scambiano
- il guadagno dello scambio è $g_{ij} = max\{0, \alpha_j s_i - \alpha_i s_j\}$; il guadagno della coalizione T connessa secondo σ_0 è $v(T) = \sum_{j \in T} \sum_{i \in P(\sigma_0, j) \cap T} g_{ij}$
- per una coalizione $S \subseteq N$, l'ordinamento σ_0 induce la partizione in componenti connesse S/σ_0 e

$$v(S) = \sum_{T \in S/\sigma_0} v(T),\ S \subseteq N$$

Esempio 7.2 (Sequencing game) *Riferendosi all'Esempio 7.1 i guadagni g_{ij} sono:*

ij	12	13	21	23	31	32
g_{ij}	30	20	0	0	0	12

e il gioco è:

S	1	2	3	12	13	23	123
$v(S)$	0	0	0	30	0	0	50

$v(23) = 0$ *poichè* $u_2 > u_3$
$v(13) = 0$ *poichè la coalizione* $\{1, 3\}$ *non è connessa; il giocatore* 2 *potrebbe avvantaggiarsi dello scambio poichè* $s_3 < s_1$ *e* $g_{13} = 20$ $\diamondsuit$

Il guadagno di un ordinamento ottimale può essere ripartito secondo la *Equal Gain Splitting rule (EGS)* che assegna ad ogni agente $i \in N$ metà di ogni switch in cui è coinvolto:

$$EGS_i = \frac{1}{2} \sum_{k \in P(\sigma_0, i)} g_{ki} + \frac{1}{2} \sum_{j : i \in P(\sigma_0, j)} g_{ij}$$

Esempio 7.3 (EGS-Rule) *Riferendosi all'Esempio 7.1 la ripartizione è*

$$EGS_1 = \frac{1}{2}(g_{12} + g_{13}) = 25$$

$$EGS_2 = \frac{1}{2}g_{12} + \frac{1}{2}g_{23} = 15$$

$$EGS_3 = \frac{1}{2}(g_{13} + g_{23}) = 10$$

$\diamondsuit$

- EGS appartiene sempre al nucleo, quindi i sequencing games sono sempre bilanciati
- EGS non è simmetrica; i giocatori 1 e 2 sono simmetrici per il gioco, poichè $v(1) = v(2)$ e $v(13) = v(23)$, ma non sono simmetrici per il problema
- g_{21}, g_{31}, g_{32} non vengono mai usati poichè l'ordinamento iniziale non permette i relativi scambi
- Possibili varianti sono $\varepsilon - GS_i = \varepsilon \sum_{k \in P(\sigma_0, i)} g_{ki} + (1 - \varepsilon) \sum_{j : i \in P(\sigma_0, j)} g_{ij}, i \in N, \varepsilon \in [0, 1]$

Il valore Shapley di un sequencing game (N, v) può essere calcolato osservando che lo switch tra due giocatori $i, j \in N$ richiede che l'insieme $[i, j], \sigma_0(i) < \sigma_0(j)$ dei giocatori tra i e j secondo σ_0 sia contenuto nella coalizione
Il gioco può essere decomposto come:

$$v = \sum_{j \in N} \sum_{i \in P(\sigma_0, j)} g_{ij} u_{[i,j]}$$

Poichè i giocatori di un gioco di unanimità sono simmetrici e gli altri sono nulli, il valore Shapley è dato da:

$$\phi_i(v) = \sum_{[h,k] \ni i, h \in P(\sigma_0, k)} \frac{g_{hk}}{|[h, k]|}, \qquad i \in N$$

Esempio 7.4 (Payoff dei giocatori) *Si consideri un problema di sequenziamento con due agenti, 1 e 2, con* $\alpha_1 = 2, s_1 = 2, \alpha_2 = 6, s_2 = 3$ e $\sigma_0 = (1, 2)$

Poichè $u_1 = \dfrac{2}{2} = 1, u_2 = \dfrac{6}{3} = 2$, *gli agenti possono scambiarsi guadagnando* $g_{1,2} = \alpha_2 s_1 - \alpha_1 s_2 = 6$

Con l'ordinamento σ_0, *il costo di 1 è 4 e il tempo di attesa è 2 unità di tempo, mentre il costo di 2 è 30 e il tempo di attesa è 5 unità di tempo; con l'ordinamento* $\sigma^* = (2, 1)$, *il costo di 1 è 10 (con una perdita di 6) e il tempo di attesa è 5 unità di tempo (3 unità in più), mentre il costo di 2 è 18 (con un guadagno di 12) e il tempo di attesa è 3 unità di tempo (2 unità in meno)*

Per prima cosa, 2 risarcisce la perdita di 6 a 1 e poi dividono il rimanente guadagno di 2, cioè 12 - 6 $=$ *6* $= g_{1,2}$

Se adottano $EGS = (3, 3)$, *questo corrisponde alla situazione in cui 1 aspetta 3 unità di tempo in più che con* σ_0 *il cui valore è 6, e riceve 9, mentre 2 aspetta 2 unità di tempo in meno che con* σ_0 *il cui valore è 12,e paga 9* $\diamondsuit$

7.1.2 Linear Production Games

Alcuni agenti possiedono un insieme di risorse per produrre un insieme di beni, utilizzando gli stessi processi produttivi
Un problema di produzione è una quadrupla:

$$\mathcal{P} = (N, A, b, c)$$

dove	$N = \{1, ..., n\}$	insieme degli agenti
	A	matrice tecnologica
	$b = (b^1, ..., b^n)$	risorse degli agenti
	c	prezzi unitari dei beni

Il corrispondente gioco TU (N, v) è definito da (vedi Owen, 1975):

- l'insieme dei giocatori è N
- una coalizione $S \subseteq N$ può usare solo le sue risorse, cioè $b^S = \sum_{i \in S} b^i$, e quindi

$$v(S) = max\ \{c^T z | Az \leq b^S, z \geq 0\},\ \ S \subseteq N$$

Il nucleo di un gioco di produzione comprende le imputazioni x s.t. $x_i = b^{iT} u^*, i \in N$ dove u^* è una soluzione ottimale del problema duale associato alla grande coalizione:

$$\begin{aligned} min\ \ & b^{NT} u \\ s.t.\ \ & A^T u \geq c \\ & u \geq 0 \end{aligned}$$

- Lo stesso risultato vale per tutti i giochi associati ad un problema di programmazione lineare (Teorema di Owen); queste allocazioni, dette *vettori di Owen*, formano l'*Owen set* (vedi van Gellekom et al., 2000)

Esempio 7.5 (Linear Production game) *Un processo produttivo richiede 3 unità di risorsa $R1$ e 2 unità di risorsa $R2$; l'agente 1 ha 7 unità di $R1$ e 2 unità di $R2$ e l'agente 2 ha 3 unità di $R1$ e 4 unità di $R2$*
Supponendo che il prezzo di ciascuna unità di bene sia 2 euro, gli agenti 1 e 2 possono produrre 1 unità con un profitto di 2 euro ciascuno; se i due agenti si accordano per unire le risorse possono produrre 3 à con un profitto di 6 euro, per cui il corrispondente linear production game è $v(1) = v(2) = 2; v(12) = 6$
Il nucleo è $C(v) = \{(4 - \alpha, 2 + \alpha)\ s.t.\ 0 \leq \alpha \leq 2\}$
L'unica soluzione ottimale duale è $(0, 1)$ che corrisponde all'unico vettore di Owen $(2, 4)$ $\diamondsuit$

7.1.3 Assignment Games (Bilateral Market)

Due gruppi di agenti, venditori e compratori, possono scambiare merci che non hanno un prezzo di mercato
Ciascun venditore ha un solo oggetto e ciascun compratore può comprare al più un oggetto
Un problema di assegnazione è una quadrupla:

$$\mathcal{A} = (N^s, N^b, A, B)$$

dove $N^s = \{1, ..., n^s\}$ insieme dei venditori
$N^b = \{1, ..., n^b\}$ insieme dei compratori
$A = (a_j)_{j \in N^s}$ valutazione che ciascun venditore da del proprio oggetto
$B = (b_{ij})_{i \in N^b, j \in N^s}$ valutazione che ciascun compratore da dell'oggetto di ciascun venditore

Sia s_{ij} il surplus generato trasferendo l'oggetto da $j \in N^s$ a $i \in N^b$

$$s_{ij} = \begin{cases} b_{ij} - a_j & \text{if } b_{ij} - a_j \geq 0 \\ 0 & \text{if } b_{ij} - a_j < 0 \end{cases}$$

Se $b_{ij} - a_j < 0$ l'oggetto non viene trasferito

Il problema di assegnazione corrisponde al problema lineare intero

$$\begin{array}{lll} max & z = \displaystyle\sum_{i \in N^b, j \in N^s} s_{ij} x_{ij} & \\ s.t. & \displaystyle\sum_{i \in N^b} x_{ij} \leq 1 & , \; j \in N^s \\ & \displaystyle\sum_{j \in N^s} x_{ij} \leq 1 & , \; i \in N^b \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} & , \; i \in N^b, j \in N^s \end{array}$$

dove $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto è trasferito da } j \text{ a } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Il corrispondente gioco TU (N, v) è definito da (vedi Shapley and Shubik, 1972):

- l'insieme dei giocatori è $N = N^s \cup N^b$
- per una coalizione di due agenti $i \in N^b$ e $j \in N^s$
$$v(ij) = s_{ij}$$
- per una coalizione S con più compratori che venditori, sia $i(j) \in S \cap N^b$ il compratore dell'oggetto di $j \in S \cap N^s$
$$v(S) = max \sum_{j \in S \cap N^s} s_{i(j),j}$$
- per una coalizione S con più venditori che compratori, sia $j(i) \in S \cap N^s$ il venditore dell'oggetto comprato da $i \in S \cap N^b$
$$v(S) = max \sum_{i \in S \cap N^b} s_{i,j(i)}$$

Secondo il Teorema di Owen il nucleo contiene le soluzioni associate ad una soluzione ottimale del problema duale:

$$\begin{array}{lll} min & w = \sum_{j \in N^s} y_j + \sum_{i \in N^b} y_i & \\ s.t. & y_j^s + y_i^b \geq s_{ij} & , \ j \in N^s, \ i \in N^b \\ & y_j \geq 0 & , \ j \in N^s \\ & y_i \geq 0 & , \ i \in N^b \end{array}$$

Esempio 7.6 (Assignment game) *Si consideri un venditore,* 1 *(*$a_1 = 10$*), e due compratori,* 2 *e* 3 *(*$b_{21} = 12, b_{31} = 15$*)*

$$v(1) = v(2) = v(3) = v(23) = 0; v(12) = 2; v(13) = v(N) = 5$$

$$C(v) = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_1 = \alpha, x_2 = 0, x_3 = 5 - \alpha, 2 \leq \alpha \leq 5\}$$

Non è efficiente assegnare l'oggetto a 2*, per cui il suo payoff è 0; il payoff di* 1 *e* 3 *dipende dall'accordo (prezzo di vendita), con un minimo di 2 unità per* 1
Il prezzo di vendita è almeno 12, altrimenti sarebbe possibile un accordo tra 1 *e* 2*, ma non può essere maggiore di 15, altrimenti* 3 *non sottoscrive l'accordo* ♢

- Osservazioni economiche

  1. Se $\bar{b}_{21} = 15$ allora $C(v) = \{(5, 0, 0)\}$, cioè il prezzo di vendita è 15, secondo la legge della domanda e dell'offerta
  2. L'equilibrio tra domanda e offerta richiede che il prezzo le renda uguali; se il prezzo fosse minore di 12 la domanda sarebbe maggiore (due compratori), mentre se il prezzo fosse maggiore di 15 la domanda sarebbe minore (nessun compratore)
  3. Secondo le leggi economiche è possibile un payoff positivo per il compratore 2, a differenza del nucleo; per esempio il venditore 1 potrebbe offrire al compratore 2 parte del suo payoff, chiedendogli di aumentare l'offerta, facendo salire il prezzo per il compratore 3; un'altra possibilità è che il compratore 3 offra al compratore 2 parte del suo payoff, chiedendogli di ritirarsi dal mercato, permettendo una riduzione del prezzo

7.2 Network Games

Nascono per le situazioni econimiche che sono rappresentabili tramite una rete assegnata
Gli agenti sono associati a (controllano) gli elementi della rete, nodi e/o archi
Il controllo può non essere bigettivo:

- un agente può controllare più di un elemento
- un elemento può essere controllato da più di un agente (comitato) che decide all'unanimità, a maggioranza, etc.
- un elemento può essere non controllato (pubblico)