. . . .

Cognome e nome | Numero matricola | Corso di laurea (DIV, FIS, MAT, NTF)

Analisi Matematica I o Calcolo I | 17 dicembre 2002

Istruzioni. 1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
2. Consegnare ANCHE questo foglio.
3. Per le risposte, usare i fogli protocollo distribuiti e scrivere in modo **LEGGIBILE** (utilizzare fogli a parte per la brutta copia).
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, cellulari.
5. TEMPO a disposizione: 120 minuti.

---

1. Calcolare il limite $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{(1-\cos x)\sin 2x}$

SOLUZIONE: Il limite vale 1: per trovarlo, basta utilizzare i noti limiti fondamentali.

---

2. Determinare campo di esistenza e derivata della funzione $\displaystyle g(x) = \frac{\cos x}{1-\sqrt{x^2-2}}$ (il campo di esistenza deve essere espresso mediante intervalli o semirette, oppure loro unioni).

SOLUZIONE: Le condizioni da imporre sono: $x^2-2 \geq 0$ e $1-\sqrt{x^2-2} \neq 0$, quindi il campo di esistenza è costituito da $]-\infty,-\sqrt{3}[\cup]-\sqrt{3},-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3},|\infty[$. La derivata esiste in tutti i punti del campo di esistenza ad eccezione di $\sqrt{2}$ e vale

$$\frac{-\sin x\,(1-\sqrt{x^2-2})+\cos x\,\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2}}}{(1-\sqrt{x^2-2})^2}\,.$$

---

3. Studiare la funzione $f(x) = \log|e^x-1| - \sqrt{|e^x-1|}$ e disegnarne il grafico (non è richiesto lo studio della convessità; per il campo di esistenza vale la stessa indicazione dell'esercizio precedente).
Una volta concluso lo studio di funzione, si può stabilire quante soluzioni abbia l'equazione $f(x)=0$?

SOLUZIONE: Il campo di esistenza è $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

(per quel che riguarda l'ultimo caso, basta osservare che il logaritmo tende a infinito più lentamente della radice quadrata; in alternativa e ricordando che per $x\to+\infty$ si ha $e^x-1>0$, si può scrivere la funzione come

$$\log(e^x-1)\left[1-\frac{\sqrt{e^x-1}}{\log(e^x-1)}\right]$$

e poi applicare il teorema di de l'Hôpital alla frazione).
La derivata esiste in tutti i punti del campo di esistenza e vale

$$f'(x) = \frac{e^x}{2(e^x-1)}\cdot\begin{cases}\left[2-\sqrt{1-e^x}\right] & \text{se } x<0,\\ \left[2-\sqrt{e^x-1}\right] & \text{se } x>0.\end{cases}$$

La quantità tra quadre è positiva per ogni $x<0$; lo è anche per $x>0$ se e solo se $5>e^x$, ossia $x<\log 5$. Tenendo conto che la frazione che moltiplica la parentesi quadra è positiva se e solo se $x>0$, si deduce che: $f'(x)<0$ (e dunque f è strettamente decrescente) in $]-\infty,0[$ e in $]\log 5,+\infty[$, mentre $f'(x)>0$ (e dunque f è strettamente crescente) in $]0,\log 5[$. Di conseguenza, $\log 5$ è un punto di massimo relativo (anzi, assoluto) e non vi sono punti di minimo relativo o assoluto. Il grafico si trova in fondo alla soluzione.
Infine, basta calcolare il valore massimo assoluto, che è $f(\log 5) = 2\log 2 - 2$, dunque negativo, per concludere che non vi possono essere soluzioni dell'equazione $f(x)=0$.

---

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle \int_0^1 \left[\frac{x^2}{4+x^2} + xe^{-2x}\right] dx$.

SOLUZIONE: Sottraendo e sommando 4 a numeratore della frazione, quindi applicando la sostituzione $y=x/2$ si ha

$$\int_0^1 \frac{x^2+4-4}{4+x^2}\,dx = \int_0^1 \left[1-\frac{4}{4+x^2}\right] dx = \int_0^1 \left[1-\frac{1}{1+(x/2)^2}\right] dx = \Big[x\Big]_0^1 - 2\int_0^{1/2}\frac{1}{1+y^2}\,dy = 1-2\arctan(1/2).$$

Integrando per parti la funzione xe^{-2x}, si trova

$$\int_0^1 xe^{-2x}\,dx = \Big[-\frac{1}{2}\,xe^{-2x} - \frac{1}{4}\,e^{-2x}\Big]_0^1 = -\,\frac{3}{4}\,e^{-2} + \frac{1}{4}\,.$$

Pertanto,

$$\int_0^1 \left[\frac{x^2}{4+x^2}\ + xe^{-2x}\right]\,dx = -\,\frac{3}{4}\,e^{-2} + \frac{5}{4}\ - 2\arctan(1/2).$$

==

Grafico della funzione f (esercizio **3**).