

- Istruzioni.
1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
 2. Consegnare ANCHE questo foglio.
 3. Per le risposte, usare i fogli protocollo distribuiti e scrivere in modo **LEGGIBILE** (utilizzare fogli a parte per la brutta copia).
 4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, cellulari.
 5. TEMPO a disposizione: 120 minuti.

1. Calcolare i limiti $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^3}$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - 1} - x]$

SOLUZIONE. Il primo limite vale $-1/3$: per trovarlo, basta applicare il teorema di de l'Hôpital una volta, riducendosi al calcolo del limite della seguente espressione

$$\frac{1 - (1/\cos^2 x)}{3x^2} = \frac{1}{\cos^2 x} \frac{\cos^2 x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{\cos^2 x} \frac{\sin^2 x}{3x^2}$$

e ricordando uno dei limiti fondamentali. Il secondo limite vale 0: infatti

$$\sqrt{x^2 - 1} - x = [\sqrt{x^2 - 1} - x] \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x}$$

e quest'ultima quantità tende evidentemente a 0.

2. Determinare campo di esistenza e derivata prima della funzione $g(x) = \log(\sqrt{x^2 - 1} - x)$ (esprimere il campo di esistenza mediante intervalli o semirette o loro unioni).

SOLUZIONE. Il campo di esistenza è costituito da tutti i valori di x tali che $x^2 - 1 \geq 0$ e $\sqrt{x^2 - 1} - x > 0$: dalla prima condizione si ricava $|x| \geq 1$, la seconda è sicuramente soddisfatta per ogni $x < 0$ e per nessun $x \geq 0$. Dunque il campo di esistenza è dato da $] -\infty, -1] \cup]1, +\infty[$. La derivata vale

$$\frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

3. Studiare la funzione $f(x) = |x|e^{\frac{x+1}{x-1}}$ e disegnarne il grafico (non è richiesto lo studio della convessità; esprimere il campo di esistenza mediante intervalli o semirette, oppure loro unioni).

SOLUZIONE. Il campo di esistenza è evidentemente $] -\infty, 1[\cup]1, +\infty[$. La funzione non è né pari né dispari, inoltre si annulla solo per $x = 0$. Si ha facilmente

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty.$$

La derivata esiste in tutti i punti del campo di esistenza, ad eccezione di $x = 0$, e vale

$$f'(x) = \text{sign}(x) e^{\frac{x+1}{x-1}} \frac{x^2 - 4x + 1}{(x-1)^2},$$

dove $\text{sign}(x)$ vale $+1$ se $x > 0$, -1 se $x < 0$. Il numeratore della frazione si annulla se e solo se x assume uno dei valori $a = 2 - \sqrt{3}$ o $b = 2 + \sqrt{3}$. Risulta facilmente che $f'(x) < 0$ (e dunque f è strettamente decrescente) in $] -\infty, 0[$, in $]a, 1[$ e in $]1, b[$, mentre $f'(x) > 0$ (e dunque f è strettamente crescente) in $]0, a[$ e in $]b, +\infty[$. Di conseguenza, 0 è un punto di minimo relativo (anzi assoluto, dato che f non può assumere valori negativi); a è un punto di massimo relativo; non vi sono punti di massimo assoluto, data l'illimitatezza superiore della funzione. Il grafico si trova in fondo alla soluzione.

4. Calcolare gli integrali $\int e^{2x} \cos x \, dx$ e $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} \, dx$.

SOLUZIONE. Il primo integrale si calcola per parti:

$$\int e^{2x} \cos x \, dx = e^{2x} \sin x - 2 \int e^{2x} \sin x \, dx = e^{2x} \sin x - 2 \left[-e^{2x} \cos x + 2 \int e^{2x} \cos x \, dx \right],$$

da cui

$$\int e^{2x} \cos x \, dx = \frac{1}{5} [e^{2x} \sin x + 2e^{2x} \cos x] + C,$$

C costante arbitraria. Nel secondo integrale assegnato si applica la sostituzione $y = \sqrt{x^2 + 1} + 1$ e si ha

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} \, dx = \frac{1}{2} \int_2^{1+\sqrt{2}} \frac{2(y+1)}{y} \, dy = \left[y - \log |y| \right]_2^{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 + \log 2 - \log(1 + \sqrt{2}).$$

=====

Grafico della funzione f (esercizio **3**): si è posto $a = 2 - \sqrt{3}$ e $b = 2 + \sqrt{3}$. Le unità di misura nei due assi sono diverse.

