. . . .

Cognome e nome | firma | Corso di laurea (DIV, FIS, MAT, NTF)

Analisi Matematica I o Calcolo I | 15 settembre 2003

Istruzioni.
1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
2. Consegnare ANCHE questo foglio.
3. Per le risposte, usare i fogli protocollo distribuiti e scrivere in modo **LEGGIBILE** (utilizzare fogli a parte per la brutta copia).
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, cellulari.
5. TEMPO a disposizione: 120 minuti.

---

1. Calcolare i limiti $\lim_{x\to -1} \dfrac{\sin(2x)\sin^2(x+1)}{x[1-\cos(x+1)]}$ e $\lim_{x\to-\infty} x - \sqrt{x^2-1}$

SOLUZIONE. Posto $y = x+1$, il primo limite richiesto diventa

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sin(2y-2)\sin^2 y}{(y-1)[1-\cos y]} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(2y-2)}{(y-1)} \lim_{y\to 0} \frac{\sin^2 y}{1-\cos y} = \sin 2 \lim_{y\to 0} \frac{\sin^2 y}{y^2} \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{1-\cos y} = 2\sin 2$$

(si sono utilizzati i limiti notevoli per le funzioni $\sin y$ e $\cos y$).
Il secondo limite vale (banalmente) $-\infty$.

---

2. Sia k un numero reale. Determinare campo di esistenza e derivata prima della funzione $g(x) = x^3\sqrt{x^2-k}$ (discutere il campo di esistenza a seconda dei possibili valori di k).

SOLUZIONE. Il campo di esistenza è costituito da tutti i valori di x tali che $x^2 - k \geq 0$: la condizione è soddisfatta per ogni x, se $k \leq 0$; è soddisfatta se e solo se $|x| \geq \sqrt{k}$, se $k > 0$. La derivata vale

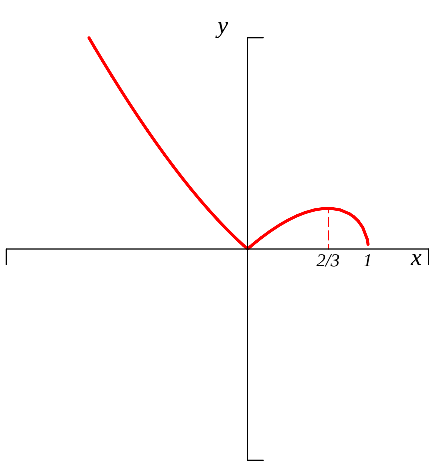
$$3x^2\sqrt{x^2-k} + \frac{x^4}{\sqrt{x^2-k}}\ .$$

---

3. Studiare la funzione $f(x) = \left|\sqrt{(1-x)} - \sqrt{(1-x)^3}\right|$ e disegnarne il grafico (è richiesto anche lo studio della convessità; esprimere il campo di esistenza mediante intervalli o semirette, oppure loro unioni).

SOLUZIONE. Il campo di esistenza è evidentemente $]-\infty, 1]$. Lo studio di funzione può essere condotto direttamente, ma si semplifica se si osserva che $\sqrt{(1-x)^3} = |1-x|\sqrt{(1-x)}$, da cui $f(x) = |x|\sqrt{1-x}$: in particolare, la funzione non é né pari né dispari e si annulla solo per $x = 0$ o per $x = 1$. Si ha facilmente

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 0.$$



La derivata esiste in tutti i punti del campo di esistenza ad eccezione di $x = 0$ e di $x = 1$ e vale

$$f'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \begin{cases} 2-3x & \text{se } x > 0, \\ 3x-2 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Risulta $f'(x) > 0$ (e dunque f è strettamente crescente) in $]0, 2/3[$, mentre $f'(x) < 0$ (e dunque f è strettamente decrescente) in $]-\infty, 0[$ e in $]2/3, 1[$. Di conseguenza, 0 e 1 sono punti di minimo relativo, 2/3 è un punto di massimo relativo; non vi sono punti di massimo assoluto, data l'illimitatezza superiore della funzione. Vi sono due punti di minimo assoluto e sono 0 e 1 (in cui la funzione si annulla, mentre altrove essa è strettamente positiva).
La derivata seconda della funzione esiste in tutti i punti del campo di esistenza ad eccezione di $x = 0$ e di $x = 1$ e vale

$$f''(x) = \frac{1}{4}\,\frac{1}{(1-x)^{3/2}} \cdot \begin{cases} 3x-4 & \text{se } x > 0, \\ 4-3x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Risulta $f''(x) > 0$ (e dunque f è convessa) in $]-\infty, 0[$, mentre $f''(x) < 0$ (e dunque f è concava) in $]0, 1[$. Il grafico è riportato in figura.

---

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$.

SOLUZIONE. La funzione integranda è continua in $[1, \sqrt{2}]$, quindi integrabile. Applicando la sostituzione $t = x^2 - 1$ (da cui $x^2 = t + 1$ e $dt = 2xdx$), si trova subito

$$\int_1^{\sqrt{2}} x^3\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (t+1)\sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{3/2}dt + \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{t}\,dt =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{t^{5/2}}{5/2}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\frac{t^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{8}{15}\ .$$