

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA I. 16 dicembre 2003.

.....
Cognome e nome

firma

Corso di laurea

1. Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 4x}) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{3x}$$

2. Si consideri la famiglia di funzioni

$$f(x) = 2(k - 2)e^x + x^2 + 10x + 2, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Determinare per quale valore di k la corrispondente funzione ha un punto di flesso per $x = 0$ e scrivere l'equazione della retta tangente nel punto di flesso.

3. Studiare la funzione

$$g(x) = \left| x e^{-\frac{1}{x}} \right|$$

e disegnarne il grafico.

4. Calcolare almeno uno dei seguenti integrali indefiniti

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad \text{e} \quad \int \frac{\log \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$$

SOLUZIONE.

1. Il primo limite é una forma indeterminata del tipo $+\infty - \infty$ che si può inizialmente razionalizzare

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 4x}) \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 4x}}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 4x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x + 1}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 4x}}.$$

A questo punto la forma indeterminata é del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Raccogliendo un x^2 all'interno delle due radici che compaiono a denominatore si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x + 1}{|x| \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{4}{x}} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(4 + \frac{1}{x} \right)}{|x| \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{4}{x}} \right)}.$$

Poiché si sta calcolando un limite per $x \rightarrow -\infty$, la variabile indipendente x é negativa per cui $|x| = -x$. Di conseguenza

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(4 + \frac{1}{x} \right)}{|x| \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{4}{x}} \right)} &= \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(4 + \frac{1}{x} \right)}{(-x) \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{4}{x}} \right)} &= \\ - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(4 + \frac{1}{x} \right)}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{4}{x}} \right)} &= -2. \end{aligned}$$

Nel secondo caso la forma indeterminata é del tipo $\frac{0}{0}$ e può essere risolta applicando una volta il teorema di de l'Hopital. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{3} = \frac{1}{3}$$

2. Si calcoli la derivata seconda di $f(x)$. La derivata prima é

$$f'(x) = 2(k-2)e^x + 2x + 10,$$

per cui

$$f''(x) = 2(k-2)e^x + 2 \longrightarrow f''(0) = 2k - 4 + 2 = 2k - 2.$$

La condizione $f''(0) = 0$ porta a concludere che $k = 1$. La corrispondente funzione, pertanto, é

$$f(x) = -2e^x + x^2 + 10x + 2.$$

Lo studio del segno di $f''(x)$ mostra che $x = 0$ é un punto di flesso discendente.

L'equazione della retta tangente é

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \rightarrow y = 8x.$$

3. Conviene studiare la funzione $h(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$ e poi rifletterne rispetto all'asse delle ascisse i rami negativi. Il dominio é

$$\text{dom}(h) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

Le ascisse dei punti di intersezione con l'asse delle x sono le soluzioni dell'equazione

$$xe^{-\frac{1}{x}} = 0 \rightarrow x = 0,$$

non accettabile in quanto non appartenente al dominio della funzione. Ciò significa che la curva $y = h(x)$ non interseca mai l'asse delle ascisse. Poiché la funzione non é definita in $x = 0$ non ci possono essere intersezioni con l'asse delle ordinate. Per quanto riguarda il segno é facile osservare che

- $h(x) > 0$ per $x > 0$
- $h(x) < 0$ per $x < 0$

I limiti agli estremi del dominio sono

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-\frac{1}{x}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{-\frac{1}{x}} = 0 \cdot (+\infty) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x^2} \right)}{\left(-\frac{1}{x^2} \right)} = - \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{x}} = -\infty.$$

A questo punto occorre cercare eventuali asintoti obliqui a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-\frac{1}{x}} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x (e^{-\frac{1}{x}} - 1).$$

Ponendo $-\frac{1}{x} = y$ si può scrivere

$$\lim_{y \rightarrow 0} (-1) \frac{e^y - 1}{y} = -1.$$

Per quanto riguarda $x \rightarrow -\infty$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-\frac{1}{x}} - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x (e^{-\frac{1}{x}} - 1) = - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = -1.$$

Questo significa che la retta $y = x - 1$ è un asintoto obliquo della curva $y = h(x)$ sia per $x \rightarrow +\infty$ che per $x \rightarrow -\infty$.

La funzione $h'(x)$ si calcola attraverso la regola di derivazione del prodotto

$$h'(x) = e^{-\frac{1}{x}} + x e^{-\frac{1}{x}} (-1) \left(-\frac{1}{x^2} \right) = e^{-\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{1}{x} \right).$$

Si studi l'equazione

$$h'(x) = 0 \rightarrow e^{-\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 0 \rightarrow 1 + \frac{1}{x} = 0 \rightarrow x = -1.$$

È facile poi vedere che $h'(x) > 0$ per $x < -1$ oppure per $x > 0$ mentre $h'(x) < 0$ per $-1 < x < 0$.

Questo significa che

- per $x < -1$ e per $x > 0$ $h(x)$ é crescente.
- per $-1 < x < 0$ $h(x)$ é decrescente.

Quindi

$$M(-1, -e) = \text{MASSIMO LOCALE.}$$

Poiché $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 0$ si può calcolare $\lim_{x \rightarrow 0^+} h'(x) = 0$ per determinare con quale pendenza la curva si avvicina all'origine. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}.$$

Il primo limite é nullo mentre il secondo può essere riscritto come

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0.$$

Quindi la curva $y = h(x)$ si avvicina all'origine con tangente orizzontale. La derivata seconda é

$$h''(x) = e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x} \right) - e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3}.$$

Di qui si vede subito che $h''(x)$ non si annulla mai (quindi non ci sono punti di flesso), é positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$. Quindi

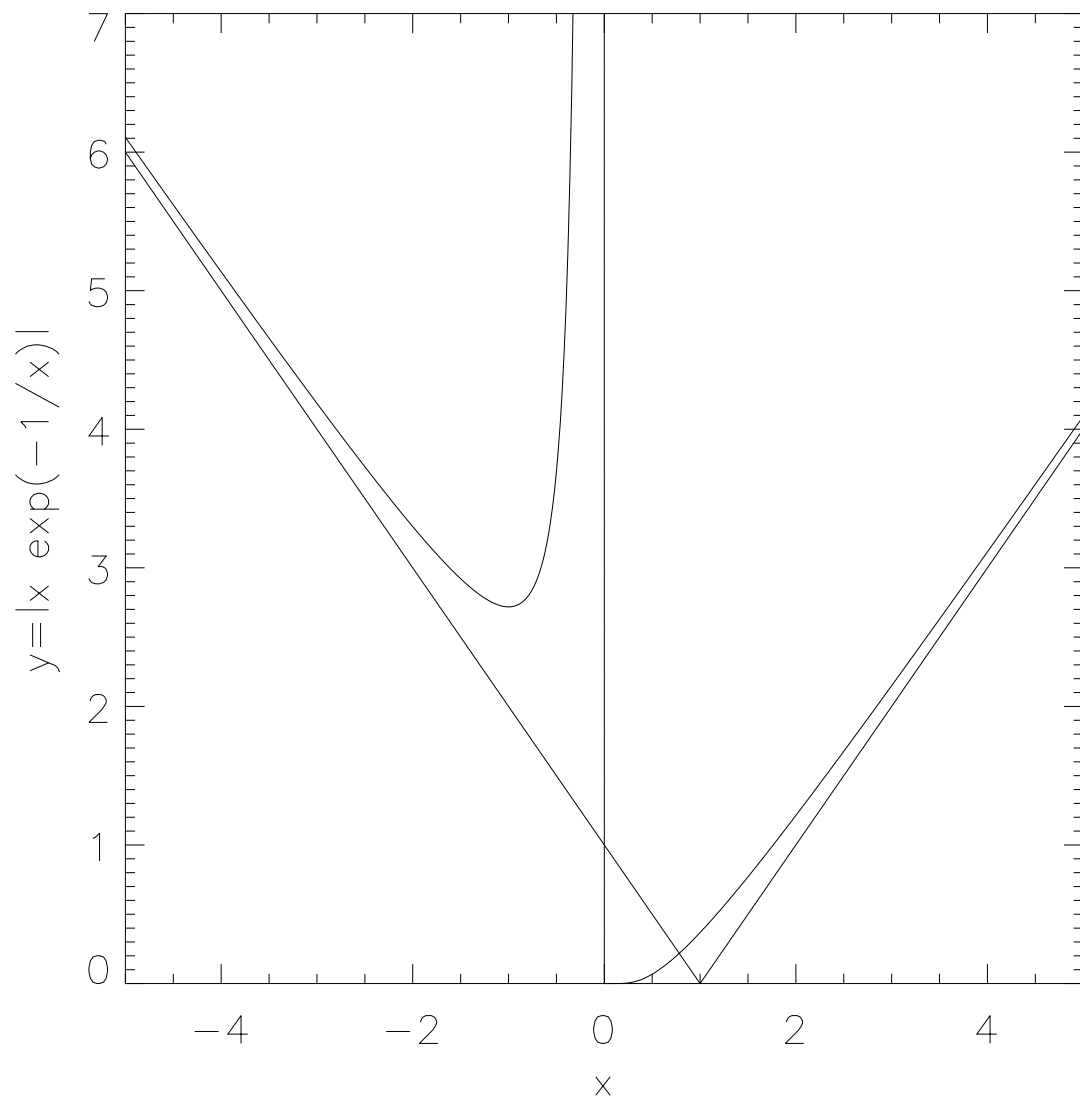
- per $x < 0$ la curva $y = h(x)$ rivolge la concavità verso il basso.
- per $x > 0$ la curva $y = h(x)$ rivolge la concavità verso l'alto.

Questo significa che la funzione $g(x) = |h(x)|$

- ha lo stesso dominio di $h(x)$
- non si annulla mai
- é sempre positiva essendo un valore assoluto
- ha come asintoto obliquo la retta $y = x - 1$ per $x \rightarrow +\infty$ e la retta $y = 1 - x$ per $x \rightarrow -\infty$. Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = +\infty$$

- $g(x)$ é decrescente per $x < -1$
- $g(x)$ é crescente per $-1 < x < 0$ e per $x > 0$
- Il punto $\mathcal{M}(-1, e)$ é un MINIMO LOCALE.
- la curva $y = g(x)$ non ha punti di flesso e rivolge sempre la concavità verso l'alto



4. Il primo integrale può essere calcolato per parti scegliendo $\frac{1}{\cos^2 x}$ come fattore differenziale. Si ha

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \tan x - \int \tan x dx.$$

L'integrale della tangente può essere risolto con una sostituzione

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{\cos x=t \rightarrow -\sin x dx=dt} = - \int \frac{dt}{t} = -\log |t| + C.$$

Quindi

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \tan x + \log |\cos x| + C.$$

Il secondo integrale può essere riscritto come

$$\int \frac{\log \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{\log \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx.$$

A questo punto si può integrare per parti scegliendo $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ come fattore differenziale

$$\begin{aligned} \int \frac{\log \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx &= \\ 2 \left\{ \sqrt{x} \log \sqrt{x} - \int \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} \sqrt{x} dx \right\} &= \\ = 2 \left\{ \sqrt{x} \log \sqrt{x} - \int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \right\} &= 2\sqrt{x} \log \sqrt{x} - 2\sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

In alternativa si poteva procedere per sostituzione ponendo

$$\sqrt{x} = t \rightarrow x = t^2 \rightarrow dx = 2t dt.$$

Di qui si ha

$$\int \frac{\log \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{\log t}{t} 2t dt = 2 \int \log t dt.$$

A questo punto il logaritmo può essere integrato per parti

$$\int \log t dt = t \log t - \int t \frac{1}{t} dt = t \log t - \int dt = t \log t - t + C.$$

In definitiva si ha

$$\int \frac{\log \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \log \sqrt{x} - 2\sqrt{x} + C.$$