PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA I. 8 gennaio 2004.

....

Cognome e nome firma Corso di laurea

1. Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x+2\log x}{2x+\log x}$$

2. Studiare la funzione

$$f(x) = \left| \frac{\log x^3}{3x} \right|$$

e disegnarne il grafico.
Determinare, inoltre, il numero delle soluzioni dell'equazione

$$f(x) = k$$

al variare del parametro k nell'insieme $\mathbb{R}$.

3. Si consideri la funzione

$$g(x) = \sqrt{4x - x^2}.$$

(a) Determinarne il dominio.

(b) Stabilire se $g(x)$ verifica, nell'intervallo $\mathcal{A} = [1, 3]$ le ipotesi del teorema di Rolle e, in caso affermativo, determinare i corrispondenti punti di Rolle.

4. Calcolare i seguenti integrali

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\, dx \quad \text{e} \quad \int e^{-x}(x^2+1)\, dx.$$

SOLUZIONE.

1. Il primo limite é una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Moltiplicando a numeratore e denominatore per $\sqrt{x+4}+2$ si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x} \frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin 5x} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{5} \frac{5x}{\sin 5x} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{20},$$

dove si é tenuto conto del fatto che

$$\lim_{x\to 0} \frac{5x}{\sin 5x} \underbrace{=}_{5x=y} \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = 1.$$

Allo stesso risultato si poteva arrivare applicando una volta il teorema di de l'Hopital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+4}}}{5\cos 5x} = \frac{1}{20}.$$

Il secondo limite é una forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.Raccogliendo un fattore x sia a numeratore che a denominatore, si ha

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1+2\frac{\log x}{x}}{2+\frac{\log x}{x}} = \frac{1}{2},$$

dove si é tenuto conto del fatto che

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

in quanto il logaritmo é un infinito di ordine inferiore a *qualunque* potenza di x.
Anche in questo caso si poteva, alternativamente, applicare il teorema di de l'Hopital

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x+2\log x}{2x+\log x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{2+\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}.$$

2. Si vede facilmente che il dominio di $f(x)$ é

$$\mathrm{dom}(f) = (0, +\infty).$$

Si puó, inoltre, osservare che

$$f(x) = \left|\frac{\log x^3}{3x}\right| = \left|\frac{\log x}{x}\right| \quad \forall x \in \mathrm{dom}\ (f),$$

per cui ci si puó limitare a studiare la funzione

$$h(x) = \frac{\log x}{x}.$$

Il grafico di $f(x)$ si otterá riflettendo rispetto all'asse x i rami negativi della curva $y = h(x)$.
Per $x = 0$ la funzione $h(x)$ non é definita, per cui la curva $y = h(x)$ non presenta intersezioni con l'asse delle ordinate. Le intersezioni con l'asse delle x sono individuate dall'equazione

$$\frac{\log x}{x} = 0 \to x = 1.$$

Si vede subito, inoltre, che

- $h(x) > 0 \ \forall x \in (1, +\infty)$
- $h(x) < 0 \ \forall x \in (0, 1)$

Per quanto riguarda i limiti agli estremi del dominio, si ha

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{x} = -\infty$$

e

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x} = 0.$$

Questo significa che l'asse delle ordinate é un asintoto verticale (da destra), mentre quello delle ascisse é un asintoto orizzontale destro.
La derivata prima é

$$h'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2}.$$

Gli zeri di $h'(x)$ sono dati dall'equazione

$$\frac{1 - \log x}{x^2} = 0 \to 1 - \log x = 0 \to x = e.$$

Lo studio del segno di $h'(x)$ mostra, inoltre, che

- $h'(x) > 0 \;\; \forall x \in (0, e)$
- $h'(x) < 0 \;\; \forall x \in (e, +\infty)$

da cui si puó concludere che $x = e$ é PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO con ordinata del massimo pari a $y_M = \frac{1}{e}$.
La derivata seconda é

$$h''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x(1 - \log x)}{x^4} = \frac{2 \log x - 3}{x^3}.$$

Gli zeri di $h''(x)$ sono dati dall'equazione

$$2 \log x - 3 = 0 \to x = \sqrt{e^3}.$$

Si vede, inoltre, che

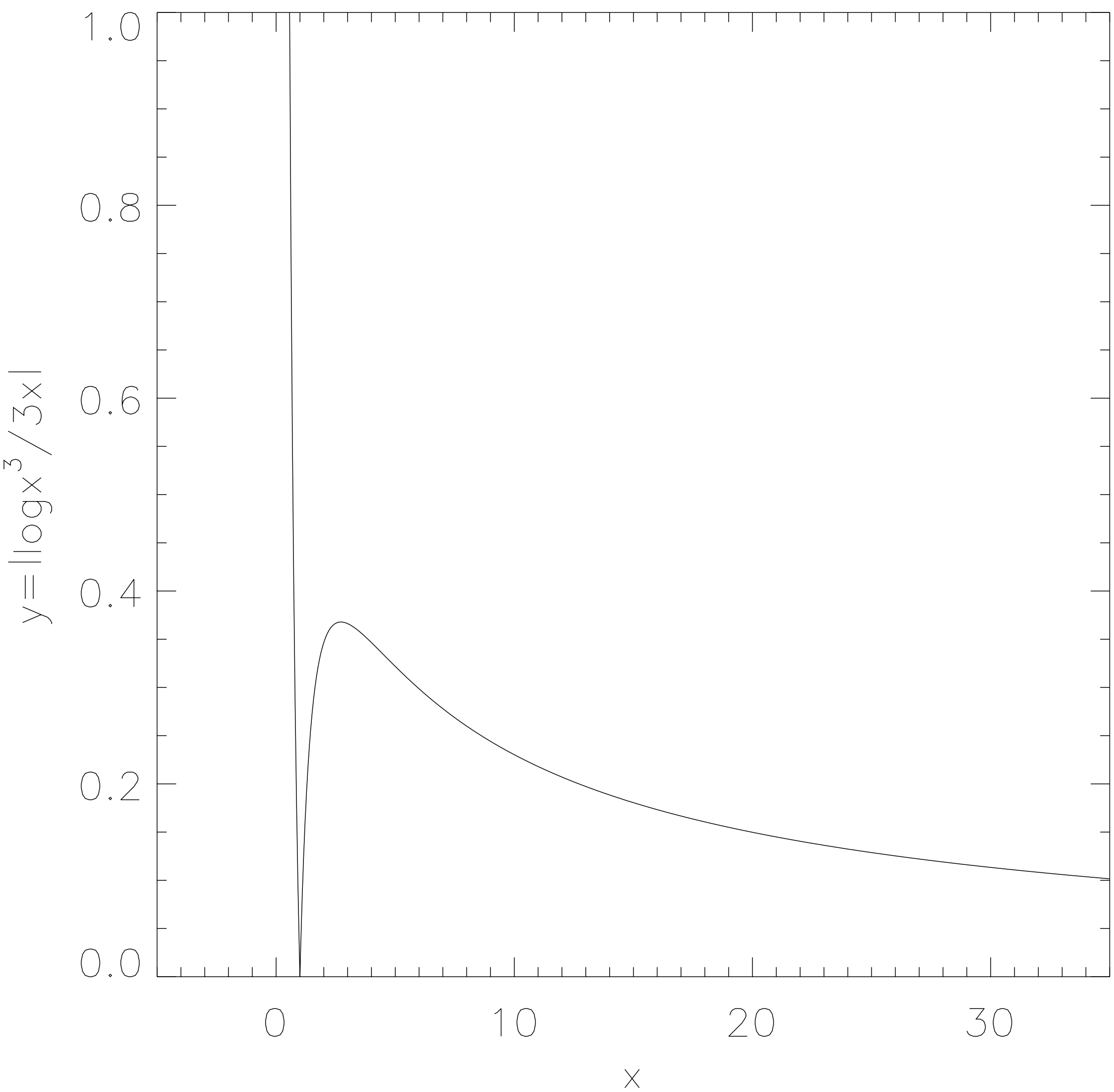
- $h''(x) < 0 \;\; \forall x \in (0, \sqrt{e^3})$
- $h''(x) > 0 \;\; \forall x \in (\sqrt{e^3}, +\infty)$

Quindi per $x = \sqrt{e^3}$ si ha un PUNTO DI FLESSO ASCENDENTE con ordinata del flesso $y_F = \frac{3}{2\sqrt{e^3}}$. Questo significa che $f(x) = |h(x)|$

- si annulla per $x = 1$ ed é, per il resto, ovunque positiva nel suo dominio
- ha come limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

- per $x = e$ ha un PUNTO DI MASSIMO LOCALE con ordinata del massimo $y_M = \frac{1}{e}$. Per $x = 1$, inoltre, ha un PUNTO ANGOLOSO che é anche PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO con ordinata del minimo $y_m = 0$.
- per $x = \sqrt{e^3}$ ha un PUNTO DI FLESSO ASCENDENTE con ordinata del flesso $y_F = \frac{3}{2\sqrt{e^3}}$



1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
y=|logx^3/3x|
0
10
20
30
x

Le soluzioni dell'equazione

$$f(x) = k$$

sono le ascisse dei punti di intersezione tra il grafico della funzione e una generica retta parallela all'asse delle ascisse.
É facile vedere che

- per $k < 0$ non ci sono soluzioni.
- per $k = 0$ c'é una sola soluzione che é $x = 1$.
- per $0 < x < \frac{1}{e}$ ci sono tre soluzioni.
- per $k = \frac{1}{e}$ ci sono due soluzioni di cui una é $x = e$.
- per $k > \frac{1}{e}$ c'é una sola soluzione.

3. Il dominio della funzione $g(x)$ é individuato dalla disequazione

$$4x - x^2 \geq 0 \rightarrow 0 \leq x \leq 4,$$

per cui

$$\mathrm{dom}(g) = [0, 4].$$

A questo punto si puó osservare che $g(x)$ é continua in $[1, 3]$ in quanto composizione di funzioni continue e derivabile in $(1, 3)$ in quanto composizione di funzioni derivabili. Inoltre $g(1) = g(3) = \sqrt{3}$ per cui le ipotesi del teorema di Rolle sono verificate. questo significa che esiste almeno un punto $x \in (1, 3)$ in corrispondenza del quale la derivata prima si annulla.
La $g'(x)$ é

$$g'(x) = \frac{4 - 2x}{2\sqrt{4x - x^2}} = \frac{2 - x}{\sqrt{4x - x^2}},$$

da cui si vede che il punto di Rolle cercato é $x = 2$.

4. Il primo integrale puó essere risolto utilizzando la sostituzione

$$\sqrt{2x + 1} = t \rightarrow 2x + 1 = t^2$$

da cui differenziando membro a membro

$$2dx = 2tdt \rightarrow dx = tdt.$$

A questo punto l'integrale di partenza puó essere riscritto come

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\,dx = \int_1^3 \frac{(t^2-1)}{2}\frac{1}{t}t\,dt = \frac{1}{2}\int_1^3 (t^2-1)dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3}-t\right]_1^3 = \frac{10}{3}.$$

Il secondo integrale puó essere risolto per parti scegliendo e^{-x} come fattore differenziale. Si ha

$$\begin{aligned}\int (x^2+1)e^{-x}dx &= -e^{-x}(x^2+1) + 2\int xe^{-x}dx = \\ &= -e^{-x}(x^2+1) + 2\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}dx\right) = \\ &= -e^{-x}(x^2+1) - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C = -e^{-x}(x^2+2x+3) + C,\end{aligned}$$

dove C é un'arbitraria costante d'integrazione.