. . . .

Cognome e nome   firma   Corso di laurea (DIV, FIS, MAT, NTF)

Analisi Matematica I o Calcolo I   19 marzo 2004

Istruzioni. 1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
2. Consegnare ANCHE questo foglio.
3. Per le risposte, usare i fogli protocollo distribuiti e scrivere in modo **LEGGIBILE** (utilizzare fogli a parte per la brutta copia).
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, cellulari.
5. TEMPO a disposizione: 120 minuti.

---

1. Calcolare i limiti $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$ e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5x}$

SOLUZIONE. Moltiplicando e dividendo per $\sqrt{x+2}+\sqrt{2}$, il primo limite richiesto diventa

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}{x+2-2} = 6\sqrt{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x))}{3x} = 6\sqrt{2}$$

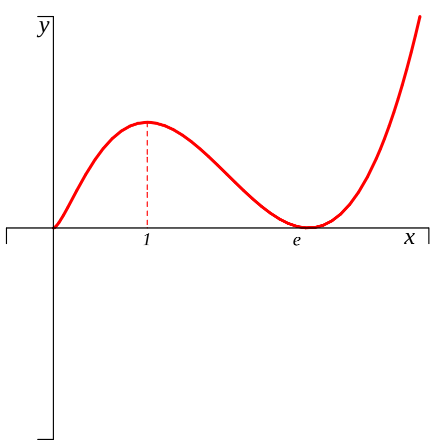
(si è usato il limite notevole relativo alla funzione $(\sin x)/x$).
Il secondo limite è immediato:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{5} = e^5$$

(si è usato il limite notevole relativo alla funzione $(1+1/x)^x$).

---

2. Studiare la seguente funzione reale di variabile reale e tracciarne il grafico $f(x) = (x\log x - x)^2$ (non è richiesto lo studio della convessità; esprimere il campo di esistenza mediante intervalli o semirette, oppure loro unioni).



SOLUZIONE. Il campo di esistenza è costituito da $]0,+\infty[$. La funzione f assume valori non negativi e si annulla se e solo se $\log x = 1$, ossia $x = e$. Si ha facilmente

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

(si ricordi che, per $x \to 0^+$, la funzione $x\log x$ tende a 0). La derivata esiste in tutti i punti del campo di esistenza e vale

$$f'(x) = 2x\log x(\log x - 1) \ :$$

f' è strettamente positiva (e dunque f è strettamente crescente) in $]0,1[$ e in $]e,+\infty[$; f' è strettamente negativa (e dunque f è strettamente decrescente) in $]1,e[$; $x = 1$ è punto di massimo relativo, $x = e$ è punto di minimo assoluto; non vi sono punti di massimo assoluto. Il grafico di f è riportato in figura.

---

3. Dire se la funzione $g(x) = \log(2x-1)$ soddisfa nell'intervallo $[1,2]$ le ipotesi del teorema di Lagrange. In caso affermativo, determinare il punto fornito dal medesimo teorema.

SOLUZIONE. La funzione è definita, continua e derivabile nell'intervallo $[1,2]$, quindi le ipotesi del teorema di Lagrange sono soddisfatte. Il punto fornito c dalla tesi (a priori, non unico) è tale che

$$g'(c) = \frac{g(2)-g(1)}{2-1} \ :$$

il quoziente a secondo membro vale $\log 3$, mentre $g'(x) = 2/(2x-1)$, per ogni $x \in]1,2[$; pertanto, c deve essere tale che $2/(2c-1) = \log 3$, da cui $c = 1/2 \ + \ 1/\log 3$ (unica possibilità).

---

4. Calcolare gli integrali $\int (x^2-2x+1)e^{-x}\,dx$ e $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx$

SOLUZIONE. Nel primo integrale si può procedere direttamente oppure, osservato che la parentesi tonda contiene il quadrato del binomioi $x-1$, operare la sostituzione $y = x-1$ (da cui $dy = dx$) e integrare per parti due volte come segue

$$\int (x^2-2x+1)e^{-x}\,dx = \int y^2e^{-y-1}\,dy = \frac{1}{e}\left(-y^2e^{-y} + 2\int ye^{-y}dy\right) = \frac{1}{e}\left[-y^2e^{-y} + 2\left(-ye^{-y} + \int e^{-y}dy\right)\right] =$$
$$-\,e^{-y-1}(y^2+2y+2) + C = -e^{-x}(x^2+1) + C,$$

al variare di $C \in \mathbb{R}$.
Il secondo è l'integrale di una funzione razionale e si può procedere con il metodo dei fratti semplici. Tuttavia è più facile ricorrere ad un metodo alternativo, basato sulla sostituzione $y = x^2$ (da cui $dy = 2xdx$):

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\,dy = \frac{1}{2}\Big[\arctan y\Big]_0^1 = \frac{\pi}{8}\,.$$