PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA I. 22 giugno 2004.

....

Cognome e nome firma Corso di laurea

1. Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} \qquad\qquad \lim_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$$

2. Studiare la seguente funzione reale di variabile reale e tracciarne il grafico

$$f(x) = \frac{1}{x}\log^2 x$$

3. Determinare per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione

$$g(x) = ax^3 - 5x^2 + 3x + b$$

ha un flesso in $P(3, -1)$. Scrivere l'equazione della retta tangente in P.

4. Calcolare i seguenti integrali

$$\int \frac{\cos 3x}{1 + \sin 3x}\, dx \qquad\qquad \int_0^1 \arctan\sqrt{x}\, dx$$

SOLUZIONE.

1. Il primo limite è una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ che può essere risolta applicando il teorema di de l'Hopital

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x-\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x} = 2$$

   Nel secondo caso la forma indeterminata è del tipo 1^∞. Si può introdurre la variabile $y=\frac{1}{x}$ e riscrivere il limite nella forma

$$\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{2}{y}\right)^y = e^2.$$

2. Il dominio della funzione è chiaramente $\mathbb{R}^+$. Inoltre, $f(x)$ si annulla in $x=1$ ed è non negativa $\forall x\in\mathbb{R}^+$.
   Per quanto riguarda i limiti agli estremi del dominio si ha

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log^2 x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log^2 x}{x} = 0.$$

   Quindi, l'asse delle y è un asintoto verticale, mentre l'asse delle x è un asintoto orizzontale destro.
   La derivata prima è

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{x}\log x\ x - \log^2 x}{x^2} = \frac{2\log x - \log^2 x}{x^2}.$$

   I punti critici, pertanto, sono dati dall'equazione

$$\log x(2-\log x) = 0$$

   che ha come soluzioni $x=1$ e $x=e^2$. È inoltre facile vedere che $f'(x)>0\ \ \forall x\in(1,e^2)$ mentre $f'(x)<0\ \ \forall x\in(0,1)\cup(e^2,+\infty)$, per cui

   - $x_m=1$ è un **punto di minimo assoluto** con ordinata del minimo $y_m=0$.
   - $x_M=e^2$ è un **punto di massimo relativo** con ordinata del massimo $y_M=4e^{-2}$.

La derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{\left(\frac{2}{x} - \frac{2\log x}{x}\right)x^2 - (2\log x - \log^2 x)2x}{x^4} = \frac{2(1 - 3\log x + \log^2 x)}{x^3}.$$

L'equazione

$$\log^2 x - 3\log x + 1 = 0$$

ha come soluzioni $x_1 = e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$ e $x_2 = e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$. Inoltre $f''(x) > 0 \ \ \forall x \in (0, e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}) \cup (e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}, +\infty)$ e $f''(x) < 0 \ \ \forall x \in (e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}, e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}})$, per cui

- $x_1 = e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$ è un **punto di flesso discendente**.
- $x_2 = e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$ è un **punto di flesso ascendente**.

Il grafico della funzione è il seguente

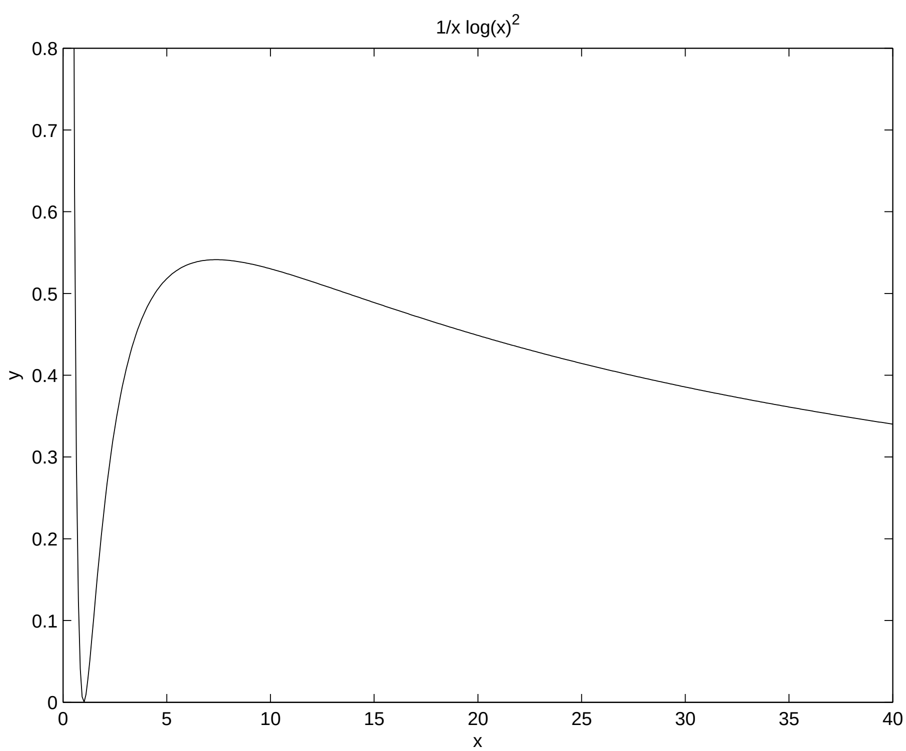

Figure 1: rappresentazione della funzione $f(x) = \frac{1}{x}\log^2 x$

3. La derivata seconda di $g(x)$ è

$$g''(x) = 6ax - 10.$$

Se la curva $y = g(x)$ ha un flesso in $P(3, -1)$, allora si deve avere che

$$g''(3) = 0 \longrightarrow 18a - 10 = 0 \longrightarrow a = \frac{5}{9}.$$

Inoltre, imponendo il passaggio della curva per P si ha

$$27a - 45 + 9 + b = -1 \longrightarrow 15 - 45 + 10 + b = 0 \longrightarrow b = 20.$$

Quindi la funzione cercata è

$$g(x) = \frac{5}{9}x^3 - 5x^2 + 3x + 20.$$

La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{5}{3}x^2 - 10x + 3 \longrightarrow g'(3) = 15 - 30 + 3 = -12$$

La retta tangente al grafico nel punto P ha equazione

$$y + 1 = g'(3)(x - 3) \longrightarrow y + 1 = -12(x - 3)$$

4. Il primo integrale si può riscrivere come

$$\int \frac{\cos 3x}{1 + \sin 3x} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3 \cos 3x}{1 + \sin 3x} dx = \frac{1}{3} \int \frac{d(1 + \sin 3x)}{1 + \sin 3x} = \frac{1}{3} \log(1 + \sin 3x) + C.$$

Per quanto riguarda il secondo, si può usare la sostituzione

$$\sqrt{x} = t \longrightarrow x = t^2 \quad dx = 2tdt.$$

Si ha, quindi

$$\begin{aligned} \int_0^1 \arctan \sqrt{x} \; dx &= 2 \int_0^1 t \arctan t dt = \\ &= 2 \left\{ \left[\frac{t^2}{2} \arctan t \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t^2}{1 + t^2} dt \right\} = \\ &= 2 \left\{ \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 dt + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1 + t^2} dt \right\} = 2 \left\{ \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} \right\} = \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$