PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA I. 12 luglio 2004.

....

Cognome e nome	firma	Corso di laurea

1. Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-4x+2}) \qquad\qquad \lim_{x\to+\infty} x(\pi-2\arctan x)$$

2. Studiare la seguente funzione

$$f(x)=\frac{x}{\log x}$$

   e tracciarne il grafico.

3. Determinare per quali valori del parametro $a\in\mathbb{R}$ la funzione

$$g(x)=ax^3-3x^2+(a-1)x+5$$

   è crescente $\forall x\in\mathbb{R}$.

4. Calcolare i seguenti integrali

$$\int x^3e^{-x^2}\,dx \qquad\qquad \int_0^1 x\arctan x\,dx$$

1. La prima è una forma indeterminata del tipo $\infty - \infty$ che può essere razionalizzata. Si ha

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-4x+2}) = \\
&\quad = \lim_{x\to+\infty}\left[(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-4x+2})\frac{(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-4x+2})}{(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-4x+2})}\right] \\
&\quad = \lim_{x\to+\infty}\frac{6x-2}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-4x+2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{6-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}} = 3.
\end{aligned}
$$

Nel secondo caso si tratta di una forma indeterminata del tipo $0\cdot\infty$ che può essere riscritta nel modo seguente

$$
\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi-2\arctan x}{\frac{1}{x}} \underbrace{=}_{\text{Hopital}} \lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{2}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2+1} = 2.
$$

2. Il dominio di $f(x)$ è

$$
\operatorname{dom} f = (0,1)\cup(1,+\infty).
$$

È inoltre facile vedere che $f(x)$ non si annulla mai nel suo dominio e che

- $f(x) < 0 \ \forall x \in (0,1)$
- $f(x) > 0 \ \forall x \in (1,+\infty)$

Per quanto riguarda i limiti agli estremi del dominio si ha

$$
\lim_{x\to0^+}\frac{x}{\log x} = 0 \qquad \lim_{x\to1^-}\frac{x}{\log x} = -\infty \qquad \lim_{x\to1^+}\frac{x}{\log x} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\log x} = +\infty.
$$

Non ci sono asintoti obliqui, dal momento che

$$
\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\log x} = 0.
$$

La derivata prima è

$$
f'(x) = \frac{\log x - x\frac{1}{x}}{\log^2 x} = \frac{\log x - 1}{\log^2 x}.
$$

La $f'(x)$ si annulla quando

$$\log x - 1 = 0 \longrightarrow x = e.$$

È inoltre facile vedere che

- $f'(x) < 0 \;\; \forall x \in (0, e)$
- $f'(x) > 0 \;\; \forall x \in (e, +\infty)$

Di qui si conclude che $x_m = e$ è un **punto di minimo relativo** con ordinata del minimo $y_m = e$.
La derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x}\log^2 x - (\log x - 1)2\log x \frac{1}{x}}{\log^4 x} = \frac{2 - \log x}{x \log^3 x}.$$

Di qui si vede che $f''(x) = 0$ quando $x = e^2$. Inoltre

- $f''(x) > 0 \;\; \forall x \in (1, e^2)$
- $f''(x) < 0 \;\; \forall x \in (0, 1) \cup (e^2, +\infty)$

Di qui si conclude che $x_F = e^2$ è un **punto di flesso discendente** con ordinata del flesso $y_F = \frac{e^2}{2}$.
Il grafico della funzione è indicato di seguito.

3. La funzione $g(x) = ax^3 - 3x^2 + (a-1)x + 5$ è crescente $\forall x \in \mathbb{R}$ per quei valori di $a \in \mathbb{R}$ tali per cui

$$g'(x) = 3ax^2 - 6x + (a-1)$$

risulta non negativa $\forall x \in \mathbb{R}$. Devono, quindi, essere sodddisfatte le seguenti condizioni

$$\begin{cases} \frac{\Delta}{4} \leq 0 \\ 3a > 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -a^2 + a + 3 \leq 0 \\ a > 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a \leq \frac{1-\sqrt{13}}{2} \wedge a \geq \frac{1+\sqrt{13}}{2} \\ a > 0 \end{cases}$$

per cui deve essere $a \geq \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

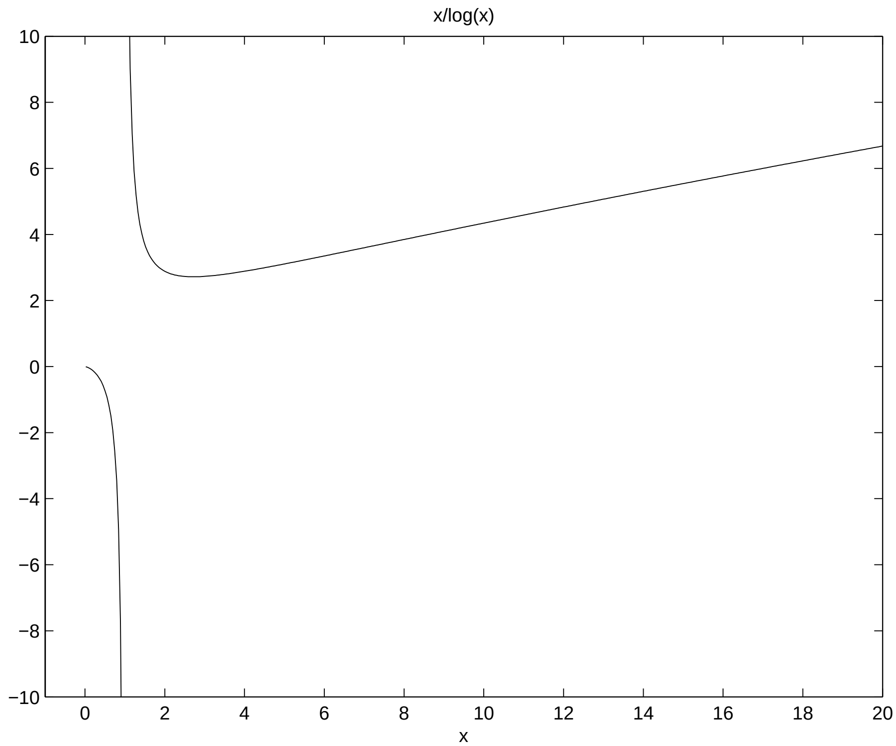

Figura 1: rappresentazione della funzione $f(x) = \frac{x}{\log x}$

4. Nel primo caso si può porre $x^2 = t \longrightarrow 2xdx = dt$, per cui l'integrale diventa

$$\int x^3 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int te^{-t} dt \underbrace{=}_{\text{per parti}} \frac{1}{2} \left(-te^{-t} + \int e^{-t} dt \right) =$$
$$= \frac{1}{2}(-te^{-t} - e^{-t}) + C = -\frac{1}{2} e^{-x^2}(x^2 + 1) + C.$$

Nel secondo caso l'integrale può essere calcolato per parti

$$\int_0^1 x \arctan x dx = \left[\frac{x^2}{2} \arctan x \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1 + x^2} dx =$$
$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \left\{ \int_0^1 x\, dx - \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\, dx \right\} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$