

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA I. 15 settembre 2004.

.....
Cognome e nome

firma

Corso di laurea

1. Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\log(x^2 + 2x) - \log(2x^2 + 3x)] \qquad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{2}{x}}.$$

2. Studiare la funzione

$$f(x) = \log \left(\frac{x^2 - 1}{x} \right)$$

e tracciarne il grafico.

3. Data la funzione

$$g(x) = a \sin x + b \cos 2x \quad a, b \in \mathbb{R}$$

calcolare i valori dei coefficienti a e b in modo tale che $x_M = \frac{\pi}{6}$ sia un punto di massimo con ordinata $y_M = \frac{3}{2}$.

4. Calcolare i seguenti integrali

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx \qquad \int_0^1 \frac{1}{4 - x^2} dx.$$

SOLUZIONE.

1. Il primo limite è una forma indeterminata del tipo $\infty - \infty$. È possibile riscrivere il limite come

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log \left(\frac{x^2 + 2x}{2x^2 + 3x} \right) = \log \frac{1}{2}.$$

Il secondo limite è una forma indeterminata del tipo 1^∞ . Ponendo $\frac{1}{x} = y$ si ha

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{y} \right)^{2y} = e^6.$$

2. Il dominio della funzione è l'insieme soluzione della disequazione $\frac{x^2-1}{x}$, cioè

$$\text{dom}(f) = (-1, 0) \cup (1, +\infty).$$

La funzione si annulla in corrispondenza dei punti $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Inoltre

- $f(x) > 0 \quad \forall x \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0 \right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty \right)$
- $f(x) < 0 \quad \forall x \in \left(-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \cup \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$

Per quanto riguarda i limiti agli estremi del dominio si ha

- $\lim_{x \rightarrow -1^+} \log \left(\frac{x^2-1}{x} \right) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \log \left(\frac{x^2-1}{x} \right) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} \log \left(\frac{x^2-1}{x} \right) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log \left(\frac{x^2-1}{x} \right) = +\infty$

Non ci sono asintoti obliqui dal momento che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. La derivata prima è

$$f'(x) = \frac{x}{x^2-1} \frac{x^2+1}{x^2} = \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}.$$

Poichè $f'(x)$ non si annulla mai, non ci sono punti critici. Inoltre studiando il segno di $f'(x)$ si conclude facilmente che la funzione $f(x)$ è

strettamente crescente in tutto il suo dominio.

La derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{(-x^4 - 4x^2 + 1)}{x^2(x^2 - 1)^2}.$$

Lo studio degli zeri e del segno di $f''(x)$ mostra che $x_F = -\sqrt{-2 + \sqrt{5}}$ è un **punto di flesso ascendente**.

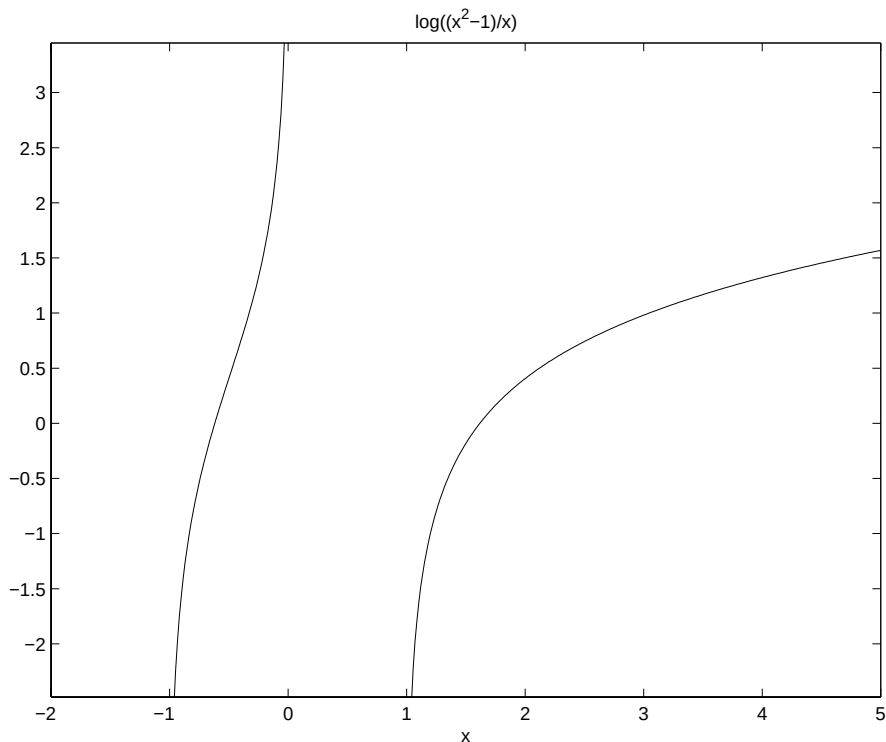


Figura 1: rappresentazione della funzione $f(x) = \log\left(\frac{x^2-1}{x}\right)$

3. I due parametri sono individuati dal sistema

$$\begin{cases} g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2} \\ g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a + b = \frac{3}{2} \\ a - 2b = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Si verifica facilmente che la funzione $g(x) = 2\sin x + \cos 2x$ ha la proprietà richiesta.

4. Il primo integrale può essere riscritto come

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx = \arctan(e^x) + C.$$

Il secondo integrale si calcola scomponendo la funzione integranda in fratti semplici

$$\int_0^1 \frac{1}{4 - x^2} dx = \frac{1}{4} \int_0^1 \left(\frac{1}{2 - x} + \frac{1}{2 + x} \right) = \frac{1}{4} [-\log |2 - x| + \log |2 + x|]_0^1 = \frac{1}{4} \log 3$$